



# BLOQUE II

## Geometría

5. Vectores en el espacio
6. Espacio afín
7. Espacio métrico
8. La esfera

www.yourdomain.com

# 5

# Vectores en el espacio



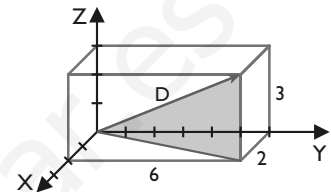
## 1. Operaciones con vectores

### ■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente la longitud de la diagonal del ortoedro aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio.

**Solución:**

$$L = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ unidades}$$



### ● Aplica la teoría

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

- a)  $\vec{v}(8, 4, 1)$                       b)  $\vec{v}(-2, 9, 6)$   
 c)  $\vec{v}(4, -2, 0)$                       d)  $\vec{v}(-3, -1, 4)$

**Solución:**

- a)  $|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$   
 b)  $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 9^2 + 6^2} = 11$   
 c)  $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$   
 d)  $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

2. Se sabe que un vector del espacio es  $\vec{v} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Determina los valores posibles de la coordenada  $z$  sabiendo que el  $|\vec{v}| = 13$

**Solución:**

$$|\vec{v}| = 13$$

$$\sqrt{4^2 + (-12)^2 + z^2} = 13$$

$$z^2 + 160 = 169$$

$$z = \sqrt{9} = \pm 3$$

3. Calcula un vector unitario en la dirección del vector  $\vec{v}$  en los siguientes casos:

- a)  $\vec{v}(1, 2, 2)$                       b)  $\vec{v}(-3, 1, 2)$

**Solución:**

- a)  $|\vec{v}| = 3$                       b)  $|\vec{v}| = \sqrt{14}$
- $$\vec{u}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \qquad \qquad \vec{u}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

4. Dados los vectores  $\vec{u}(3, -2, 5)$  y  $\vec{v}(-1, 4, -6)$ , calcula:

- a)  $2\vec{u}$                                       b)  $-\vec{v}$   
 c)  $\vec{u} + \vec{v}$                                   d)  $\vec{u} - \vec{v}$

**Solución:**

- a)  $2\vec{u} = 2(3, -2, 5) = (6, -4, 10)$   
 b)  $-\vec{v} = (1, -4, 6)$   
 c)  $\vec{u} + \vec{v} = (3, -2, 5) + (-1, 4, -6) = (2, 2, -1)$   
 d)  $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2, 5) - (-1, 4, -6) = (4, -6, 11)$

5. Dados los vectores  $\vec{u}(1, -4, -3)$ ,  $\vec{v}(2, 5, -1)$  y  $\vec{w}(-6, 0, 5)$ , calcula:

- a)  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$                               b)  $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

**Solución:**

- a)  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (1, -4, -3) + (2, 5, -1) - (-6, 0, 5) = (9, 1, -9)$   
 b)  $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = 2(1, -4, -3) - (2, 5, -1) + (-6, 0, 5) = (-6, -13, 0)$

6. Dados los vectores  $\vec{u}(1, 0, -2)$ ,  $\vec{v}(3, 4, -1)$ ,  $\vec{w}(1, -1, 3)$  y  $\vec{x}(8, 5, 9)$ , calcula el valor de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**Solución:**

$$(8, 5, 9) = a(1, 0, -2) + b(3, 4, -1) + c(1, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + c = 8 \\ 4b - c = 5 \\ -2a - b + 3c = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 3$$

## 2. Problemas de vectores

### ■ Piensa y calcula

Expresa el vector  $\vec{u}(1, 2, 3)$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{v}(2, -1, 5)$  y  $\vec{w}(-1, 3, -2)$

**Solución:**

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$(1, 2, 3) = (2, -1, 5) + (-1, 3, -2)$$

### ● Aplica la teoría

7. Dados los puntos  $A(3, -1, 2)$  y  $B(-1, 2, 1)$ , calcula los vectores siguientes:

a)  $\vec{AB}$

b)  $\vec{BA}$

¿Qué relación hay entre los dos vectores?

**Solución:**

a)  $\vec{AB}(-4, 3, -1)$

b)  $\vec{BA}(4, -3, 1)$

Los vectores son opuestos.

8. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

$$A(6, -5, 3) \text{ y } B(4, -3, 7)$$

**Solución:**

$$M(5, -4, 5)$$

9. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(2, 1, -4), B(-5, 1, 3) \text{ y } C(6, 7, -5)$$

**Solución:**

$$G(1, 3, -2)$$

10. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(1, 2, -1), B(3, 1, 3), C(2, -3, 5) \text{ y } D(6, -4, 1)$$

**Solución:**

$$G(3, -1, 2)$$

11. Las coordenadas de tres vértices consecutivos de un paralelogramo son:

$$A(4, 7, -3), B(5, 1, -2) \text{ y } C(3, 2, -4)$$

Calcula las coordenadas del vértice D

**Solución:**

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-2, 1, -2)$$

$$\vec{OD} = (4, 7, -3) + (-2, 1, -2) = (2, 8, -5)$$

12. Estudia si el vector  $\vec{a}(-6, 15, 9)$  se puede expresar como combinación lineal de  $\vec{u}(3, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(4, 3, -1)$  y  $\vec{w}(-2, 5, 1)$

**Solución:**

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(-6, 15, 9) = x(3, -1, 2) + y(4, 3, -1) + z(-2, 5, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y - 2z = -6 \\ -x + 3y + 5z = 15 \\ 2x - y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 4$$

## 3. Producto escalar

### ■ Piensa y calcula

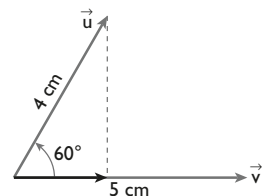
El módulo del vector  $\vec{u}$  mide 4 cm y el módulo del vector  $\vec{v}$  mide 5 cm. Si los vectores forman un ángulo de  $60^\circ$ , calcula la longitud de la proyección del vector  $\vec{u}$  sobre el vector  $\vec{v}$

**Solución:**

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = |\vec{u}| \cos 60^\circ$$

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ unidades.}$$





## ● Aplica la teoría

19. Calcula el producto vectorial de los siguientes vectores:

a)  $\vec{u}(1, -2, 4)$  y  $\vec{v}(-2, 1, -3)$

b)  $\vec{u}(4, 0, -1)$  y  $\vec{v}(1, -1, 2)$

**Solución:**

$$\text{a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3)$$

$$\text{b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -9, -4)$$

20. Dados los vectores  $\vec{u}(2, -3, 1)$ ,  $\vec{v}(3, 1, 2)$  y  $\vec{w}(1, 2, 3)$ , calcula:

a)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$                       b)  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

**Solución:**

a)  $\vec{u} \times \vec{v} = (-7, -1, 11)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-25, 32, -13)$

b)  $\vec{v} \times \vec{w} = (-1, -7, 5)$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-8, -11, -17)$

21. Halla un vector perpendicular a los vectores siguientes:

$\vec{u}(2, -1, 0)$  y  $\vec{v}(5, 1, -2)$

**Solución:**

$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, 7)$

22. Sean dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  perpendiculares entre sí. Si  $|\vec{a}| = 3$  y  $|\vec{b}| = 4$ , calcula:

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

**Solución:**

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = \\ &= 2\vec{b} \times \vec{a} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \operatorname{sen} 90^\circ = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \end{aligned}$$

23. Dados los vectores  $\vec{u}(3, -1, -2)$  y  $\vec{v}(1, 2, -1)$ , halla:

a)  $\vec{u} \times \vec{v}$

b)  $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v}$

**Solución:**

a)  $\vec{u} \times \vec{v} = (5, 1, 7)$

b)  $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = (7, 0, -5)$

$(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = (10, 2, 14)$

24. Halla el área del paralelogramo definido por los vectores:

$\vec{AB}(2, -2, -3)$  y  $\vec{AC}(2, 0, 3)$

**Solución:**

$\vec{AB} \times \vec{AD} = (-6, -12, 4)$

Área =  $|\vec{AB} \times \vec{AD}| = 14$  unidades cuadradas.

25. Calcula el área del triángulo ABC tal que:

A(1, 2, 1), B(1, -1, 0) y C(2, 1, 1)

**Solución:**

$\vec{AB}(0, -3, -1)$

$\vec{AC}(1, -1, 0)$

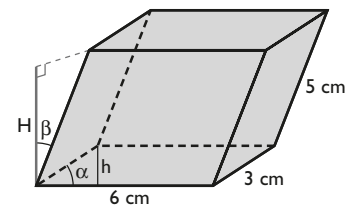
$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, -1, 3)$

Área =  $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{11}}{2} = 1,66$  unidades cuadradas.

## 5. Producto mixto

### ■ Piensa y calcula

Calcula el volumen del paralelepípedo de la figura en función de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$



**Solución:**

$V = A_B \cdot H$

$A_B = 6 \cdot 3 \operatorname{sen} \alpha$

$H = 5 \cos \beta$

$V = 6 \cdot 3 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = 90 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

## ● Aplica la teoría

26. Calcula el producto mixto de los vectores siguientes:

- a)  $\vec{u}(1, -1, 3), \vec{v}(-2, 2, 1), \vec{w}(3, -2, 5)$   
 b)  $\vec{u}(-2, 5, -4), \vec{v}(-4, 1, -2), \vec{w}(1, 5, -1)$

**Solución:**

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$\text{b) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 36$$

27. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

- a)  $\vec{u}(2, 3, -1), \vec{v}(1, -1, 3), \vec{w}(1, 9, -11)$   
 b)  $\vec{u}(3, -2, 1), \vec{v}(2, 1, 2), \vec{w}(3, -1, -2)$

**Solución:**

- a)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son linealmente dependientes.  
 b)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -25 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son linealmente independientes.

28. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos siguientes:

- a)  $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7)$  y  $D(-5, -4, 8)$   
 b)  $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1)$  y  $D(4, 1, 3)$

**Solución:**

- a)  $\vec{AB}(2, -2, -3), \vec{AC}(4, 0, 6), \vec{AD}(-7, -7, 7)$   
 Volumen =  $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 308$  unidades cúbicas.  
 b)  $\vec{AB}(3, 6, 3), \vec{AC}(1, 3, -2), \vec{AD}(2, 2, 2)$   
 Volumen =  $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 18$  unidades cúbicas.

29. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos:

$$A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) \text{ y } D(2, 1, 3)$$

**Solución:**

$$\vec{AB}(0, 1, 0), \vec{AC}(0, 1, 1), \vec{AD}(1, 1, 3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} = 0,17 \text{ unidades cúbicas.}$$

30. Calcula el valor de  $k$  para que el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:

$$\vec{u}(1, -1, 1), \vec{v}(1, 1, 1) \text{ y } \vec{w}(2, 3, k)$$

sea igual a 12 unidades cúbicas.

**Solución:**

Volumen 12 unidades cúbicas.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = 2k - 4$$

$$|2k - 4| = 12$$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

$$2k - 4 = 12 \Rightarrow k = 8$$

$$2k - 4 = -12 \Rightarrow k = -4$$

31. El volumen de un tetraedro es de 5 unidades cúbicas.

Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos:

$$A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) \text{ y } C(2, -1, 3)$$

halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y

**Solución:**

Volumen 5 unidades cúbicas.

El vértice D es de la forma  $D(0, y, 0)$ .

$$\vec{AB}(1, -1, 2)$$

$$\vec{AC}(0, -2, 4)$$

$$\vec{AD}(-2, y - 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y - 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4y$$

$$\frac{1}{6} |2 - 4y| = 5 \Rightarrow |2 - 4y| = 30$$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

$$\bullet 2 - 4y = 30 \Rightarrow y = -7$$

El vértice es:  $D(0, -7, 0)$

$$\bullet 2 - 4y = -30 \Rightarrow y = 8$$

El vértice es:  $D(0, 8, 0)$

## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

- 1** Dados los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, -1, 1)$
- los tres puntos están alineados.
  - los tres puntos no están alineados.
  - En el espacio, tres puntos no pueden estar alineados.
  - Ninguna de las anteriores es cierta.
- 2** Dados los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, -1, 1)$ , el área del triángulo que determinan es:
- 4 unidades cuadradas.
  - 8 unidades cuadradas.
  - 2 unidades cuadradas.
  - No forman triángulo.
- 3** Los vectores  $\vec{a} = (3, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  y  $\vec{c} = (0, 1, -1)$
- son linealmente dependientes.
  - son linealmente independientes.
  - son paralelos.
  - Ninguna de las anteriores es cierta.
- 4** Dados los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(1 + \lambda, 2, 1 - \lambda)$  y  $C(1 + \lambda, 1 + \lambda, 2 + \lambda)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ :
- son paralelos para  $\lambda = 0$
  - son paralelos para  $\lambda = 1$
  - forman un ángulo de  $30^\circ$  para todo valor de  $\lambda$
  - forman un ángulo de  $90^\circ$  para todo valor de  $\lambda$
- 5** Dados los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 2, 0)$  y  $C(2, 2, 3)$ , la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  es igual a:
- 3
  - 1
  - Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no forman triángulo rectángulo
  - 6
- 6** Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 1, 4)$  y  $C(3, 3, 6)$ , el área del mismo es:
- 4 unidades cuadradas.
  - $\sqrt{2}$  unidades cuadradas.
  - $4 + \sqrt{2}$  unidades cuadradas.
  - $4\sqrt{2}$  unidades cuadradas.
- 7** Sea  $A$  el punto medio del segmento de extremos  $P(3, 2, 1)$  y  $Q(-1, 0, 1)$ . El volumen del tetraedro de vértices  $A$ ,  $B(2, 1, 3)$ ,  $C(1, 2, 3)$  y  $D(3, 4, 1)$  es:
- $\frac{3}{5}$  unidades cúbicas.
  - 10 unidades cúbicas.
  - $\frac{5}{3}$  unidades cúbicas.
  - $\frac{1}{3}$  unidades cúbicas.
- 8** Un vector  $\vec{a}$  que tiene la misma dirección que el vector  $\vec{b} = (-1, 1, 1)$  y que forma con el vector  $\vec{c} = (1, 1, -1)$  un paralelogramo de 4 unidades cuadradas de área es:
- $\vec{a}_1 = (-2, 2, 2)$ ,  $\vec{a}_2 = (2, -2, -2)$
  - $\vec{a}_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $\vec{a}_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
  - $\vec{a} = (1, -1, -1)$
  - Ninguna de las anteriores.
- 9** El volumen del paralelepípedo definido por los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  es:
- 6 unidades cúbicas.
  - 3 unidades cúbicas.
  - 1 unidad cúbica.
  - no existe paralelepípedo.
- 10** Dados los vectores  $\vec{u} = (2, -1, a)$ ,  $\vec{v} = (b, -2, 2)$ , los valores de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que hacen que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sean ortogonales y  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$  son:
- $a = 2, b = -1$
  - $a = -1, b = 2$
  - $a = 1, b = -2$
  - $a = -2, b = 1$

# Ejercicios y problemas

## 1. Operaciones con vectores

32. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

- a)  $\vec{v}(3, -4, 12)$                       b)  $\vec{v}(-4, 5, 20)$   
c)  $\vec{v}(1, -5, 1)$                       d)  $\vec{v}(-3, -2, 5)$

**Solución:**

- a)  $|\vec{v}| = 13$   
b)  $|\vec{v}| = 21$   
c)  $|\vec{v}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$   
d)  $|\vec{v}| = \sqrt{38}$

33. Se sabe que un vector del espacio es:

$$\vec{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Determina los valores posibles de la coordenada  $z$  sabiendo que el  $|\vec{v}| = 7$

**Solución:**

$$|\vec{v}| = 7$$
$$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + z^2} = 7$$
$$z^2 + 13 = 49 \Rightarrow z = \sqrt{36} = \pm 6$$

34. Calcula un vector unitario en la dirección del vector  $\vec{v}$  en los siguientes casos:

- a)  $\vec{v}(1, -2, 5)$                       b)  $\vec{v}(-3, 4, 0)$

**Solución:**

- a)  $|\vec{v}| = \sqrt{30}$   
 $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$   
b)  $|\vec{v}| = 5$   
 $\vec{u}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

35. Dados los vectores  $\vec{u}(-5, 1, 3)$  y  $\vec{v}(2, -4, -1)$ , calcula:

- a)  $3\vec{u}$                                       b)  $-2\vec{v}$   
c)  $2\vec{u} + 3\vec{v}$                               d)  $3\vec{u} - \vec{v}$

**Solución:**

- a)  $3\vec{u} = 3(-5, 1, 3) = (-15, 3, 9)$   
b)  $-2\vec{v} = -2(2, -4, -1) = (-4, 8, 2)$   
c)  $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(-5, 1, 3) + 3(2, -4, -1) = (-4, -10, 3)$   
d)  $3\vec{u} - \vec{v} = 3(-5, 1, 3) - (2, -4, -1) = (-17, 7, 10)$

36. Dados los vectores  $\vec{u}(2, -1, 1)$ ,  $\vec{v}(2, 4, 3)$  y  $\vec{w}(-2, 0, 1)$ , calcula:

- a)  $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$                       b)  $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

**Solución:**

- a)  $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = 3(2, -1, 1) + 2(2, 4, 3) - (-2, 0, 1) = (12, 5, 8)$   
b)  $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (2, -1, 1) - 3(2, 4, 3) + (-2, 0, 1) = (-6, -13, -7)$

37. Dados los vectores  $\vec{u}(2, 0, 1)$ ,  $\vec{v}(-1, 3, 2)$ ,  $\vec{w}(3, -1, 4)$  y  $\vec{x}(4, 2, 17)$ , calcula el valor de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**Solución:**

$$(4, 2, 17) = a(2, 0, 1) + b(-1, 3, 2) + c(3, -1, 4)$$
$$\left. \begin{array}{l} 2a - b + 3c = 4 \\ 3b - c = 2 \\ a + 2b + 4c = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3, b = 2, c = 4$$

## 2. Problemas de vectores

38. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

$$A(4, -7, 5) \text{ y } B(6, -1, 1)$$

**Solución:**

$$M(5, -4, 3)$$

39. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(3, 1, -5), B(-1, 2, 3) \text{ y } C(1, 3, -7)$$

**Solución:**

$$G(1, 2, -3)$$

40. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(3, 2, -4), B(1, -1, 2), C(3, -2, 7) \text{ y } D(1, -3, 7)$$

**Solución:**

$$G(2, -1, 3)$$

41. Los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 2, 2)$  y  $C(1, 3, 3)$  son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice.

**Solución:**

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$
$$\vec{BC}(-1, 1, 1)$$
$$\vec{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$$



42. Comprueba que los vectores  $\vec{u}(1, 1, 3)$ ,  $\vec{v}(-1, 2, 0)$  y  $\vec{w}(1, 3, 5)$  son linealmente dependientes.

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente dependientes.

### 3. Producto escalar

43. Dados los vectores  $\vec{u}(-1, -1, 2)$  y  $\vec{v}(2, -3, 1)$
- calcula el ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
  - calcula la proyección  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos \alpha &= \frac{-1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = 70^\circ 53' 36'' \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} &= \frac{-1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{14} = 0,80 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

44. Sean los puntos  $P(1, 0, 1)$ ,  $Q(0, 1, -3)$  y  $R(0, 3, 0)$ . Halla la proyección ortogonal del vector  $\vec{PQ}$  sobre el vector  $\vec{PR}$

**Solución:**

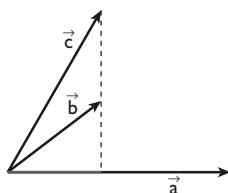
$$\vec{PQ}(-1, 1, -4)$$

$$\vec{PR}(-1, 3, -1)$$

$$\text{proy}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PR}|}$$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{PR}} \vec{PQ} &= \frac{-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \\ &= \frac{8\sqrt{11}}{11} = 2,41 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

45. Sean los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  de la figura. Deduce si son iguales los productos escalares  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  y  $\vec{a} \cdot \vec{c}$



**Solución:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{ proy}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \text{ proy}_{\vec{a}} \vec{c}$$

Como se observa en el dibujo,  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{c}$ . Por tanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

46. Prueba que si dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen el mismo módulo, entonces  $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})| = 0$

**Solución:**

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})| &= |\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}| = \\ &= ||\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2| = 0 \end{aligned}$$

47. Sean los puntos  $A(1, -5, k)$ ,  $B(3, k, 1)$  y  $C(k, -5, 2)$  los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de  $k$  para que el triángulo sea rectángulo en A

**Solución:**

$$\vec{AB}(2, k + 5, 1 - k)$$

$$\vec{AC}(k - 1, 0, 2 - k)$$

Si el triángulo es rectángulo en A:

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$2(k - 1) + (k + 5)(2 - k) = 0 \Rightarrow k^2 - k = 0$$

$$k = 0, k = 1$$

### 4. Producto vectorial

48. Dados los vectores  $\vec{u}(1, 2, 0)$  y  $\vec{v}(0, 1, 2)$ , calcula:
- el producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
  - un vector unitario ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
  - el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

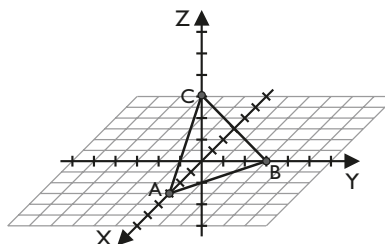
**Solución:**

$$\text{a) } \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (4, -2, 1)$$

$$\text{b) } \vec{w} = \sqrt{21} \Rightarrow \text{vector unitario: } \left( \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

$$\text{c) } \text{Área} = \vec{u} \times \vec{v} = \sqrt{21} \text{ unidades cuadradas.}$$

49. Calcula el área del triángulo ABC del dibujo.



# Ejercicios y problemas

## Solución:

$$A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) \text{ y } C(0, 0, 3)$$

$$\vec{AB}(-3, 3, 0), \vec{AC}(-3, 0, 3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (9, 9, 9)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 7,79 \text{ unidades cuadradas.}$$

50. Halla el área del triángulo ABC cuyos vértices son los puntos siguientes:

a)  $A(1, -1, 3); B(1, 2, 1) \text{ y } C(1, 0, -1)$

b)  $A(-1, 0, 0), B(1, 0, 1) \text{ y } C(0, 2, 3)$

## Solución:

a)  $\vec{AB}(0, 3, -2), \vec{AC}(0, 1, -4)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-10, 0, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5 \text{ unidades cuadradas.}$$

b)  $\vec{AB}(2, 0, 1), \vec{AC}(1, 2, 3)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -5, 4)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3,35 \text{ unidades cuadradas.}$$

51. Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que  $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

## Solución:

Sea  $\vec{x}(x, y, z)$

$$\vec{x} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 5)$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -y - z = 1 \\ x + 2z = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

que es equivalente a  $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \end{cases}$

Como  $|\vec{x}| = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6$ , se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

Soluciones:  $x = 1, y = -2, z = 1$

$$x = \frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{2}{3}$$

52. Sea  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$  y el ángulo formado por los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$   $30^\circ$ . Calcula el área del triángulo construido sobre los vectores  $\vec{a} - 2\vec{b}$  y  $3\vec{a} + 2\vec{b}$

## Solución:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|$$

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) =$$

$$= 3\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} - 4\vec{b} \times \vec{b} = 8\vec{a} \times \vec{b}$$

$$|8\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 64 u^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 64 = 32 u^2$$

## 5. Producto mixto

53. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

$$\vec{u}(2, -1, 2), \vec{v}(1, 2, -3) \text{ y } \vec{w}(3, -4, 7)$$

## Solución:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son linealmente dependientes o coplanarios.

54. Dados los vectores  $\vec{u}(0, 1, 0), \vec{v}(0, 3, 0)$  y  $\vec{w}(1, 0, 1)$ , justifica si se cumple la igualdad  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ . Interpreta el resultado.

## Solución:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Los tres vectores son coplanarios o linealmente dependientes.

55. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos  $A(0, 0, 0), B(0, 1, 2), C(1, 5, 3)$  y  $D(1, 0, 1)$

## Solución:

$$\vec{AB}(0, 1, 2), \vec{AC}(1, 5, 3), \vec{AD}(1, 0, 1)$$

$$\text{Volumen} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 8 \text{ unidades cúbicas.}$$

56. Se consideran los puntos  $A(1, 1, 1), B(0, -2, 2), C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, -1, -2)$ . Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

## Solución:

$$\vec{AB}(-1, -3, 1), \vec{AC}(-2, -1, 1), \vec{AD}(1, -2, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5 u^3$$

## Para ampliar

57. Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\vec{CB} = -3\vec{CA}$$

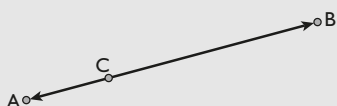
- a) Calcula el valor que toma  $k$  en la expresión

$$\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$$

- b) Si  $A(1, 2, -1)$  y  $B(9, 6, 11)$ , halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

### Solución:

a)



Si  $\vec{CB} = -3\vec{CA}$ , los dos vectores están en la misma dirección y en sentido opuesto.

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = -\vec{CA} - 3\vec{CA} = -4\vec{CA} = 4\vec{AC}$$

$$\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

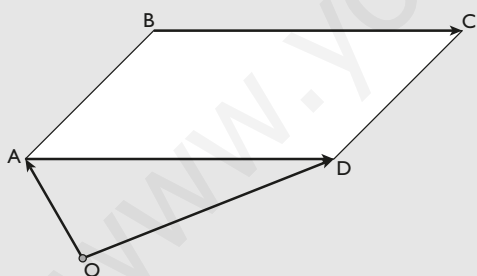
- b)  $\vec{AB}(8, 4, 12)$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB}$$

$$\vec{OC} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}(8, 4, 12) = (3, 3, 2)$$

58. Dados los puntos  $A(3, 3, 5)$ ,  $B(3, 3, 2)$  y  $C(0, 6, -1)$ , que son los vértices consecutivos de un paralelogramo, halla las coordenadas del vértice D

### Solución:



El vector  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

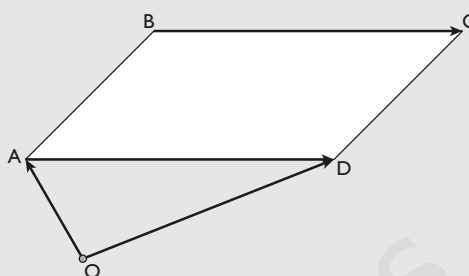
$$\vec{BC}(-3, 3, -3)$$

$$\vec{OD} = (3, 3, 5) + (-3, 3, -3) = (0, 6, 2)$$

$$D(0, 6, 2)$$

59. Dados los puntos  $A(3, -4, 7)$ ,  $B(-5, 3, -2)$  y  $C(1, 2, -3)$ , que son tres vértices del paralelogramo ABCD, halla el cuarto vértice, D, que es opuesto al vértice B

### Solución:



El vector  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$$\vec{BC}(6, -1, -1)$$

$$\vec{OD} = (3, -4, 7) + (6, -1, -1) = (9, -5, 6)$$

$$D(9, -5, 6)$$

60. Sean los vectores  $\vec{u}(-1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(2, -5, -2)$ ,  $\vec{w}(4, 1, 3)$  y  $\vec{x}(4, 1, -48)$

- a) ¿Se puede expresar  $\vec{w}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.
- b) ¿Se puede expresar  $\vec{x}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.
- c) ¿Son  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{x}$  linealmente independientes? Justifica la respuesta.

### Solución:

a)  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$

$$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

El vector  $\vec{w}$  es linealmente independiente de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

b)  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{x}$

$$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, -48)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -22, b = -9$$

El vector  $\vec{x}$  es una combinación lineal de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{x} = -22\vec{u} - 9\vec{v}$$

- c) Los tres vectores son linealmente dependientes, como se ha demostrado en el apartado anterior.

61. Escribe el vector  $\vec{b}$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , siendo:

$$\vec{u}(1, -1, 2), \vec{v}(0, 2, 6), \vec{w}(-1, -1, 3) \text{ y } \vec{b}(-1, -7, 7)$$

# Ejercicios y problemas

## Solución:

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= \vec{b} \\ x(1, -1, 2) + y(0, 2, 6) + z(-1, -1, 3) &= (-1, -7, 7) \\ \left. \begin{aligned} x - z &= -1 \\ -x + 2y - z &= -7 \\ 2x + 6y + 3z &= 7 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = 2, y = -1, z = 3 \end{aligned}$$

62. Expresa el vector  $\vec{a}(2, -5, -5)$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{u}(3, 2, 5)$ ,  $\vec{v}(2, 4, 7)$  y  $\vec{w}(1, -3, -3)$

## Solución:

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= \vec{a} \\ x(3, 2, 5) + y(2, 4, 7) + z(1, -3, -3) &= (2, -5, -5) \\ \left. \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y - 3z &= -5 \\ 5x + 7y - 3z &= -5 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = 1, y = -1, z = 1 \end{aligned}$$

63. Dados los vectores  $\vec{u}(2, 3, 4)$ ,  $\vec{v}(2, 1, 2)$  y  $\vec{w}(1, 2, 1)$ , estudia si el vector  $\vec{x}(3, 3, 0)$  depende linealmente de los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$

## Solución:

$$\begin{aligned} a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} &= \vec{x} \\ a(2, 3, 4) + b(2, 1, 2) + c(1, 2, 1) &= (3, 3, 0) \\ \left. \begin{aligned} 2a + 2b + c &= 3 \\ 3a + b + 2c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 3 \end{aligned}$$

El vector  $\vec{x}$  sí se puede poner como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$

64. Determina los valores del parámetro  $k$  para los que los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^3$ :

$$(1, 1, k), (k, 3, 2) \text{ y } (0, 0, k)$$

son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

## Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 0, k = 3$$

Para los valores  $k = 0$  y  $k = 3$ , el determinante es cero. Por tanto, los vectores son linealmente dependientes.

Para los valores  $k \neq 0$  y  $k \neq 3$ , los vectores son linealmente independientes.

65. Encuentra un vector  $\vec{w}$  cuya primera componente sea 2, y que sea perpendicular a los vectores  $\vec{u}(1, -1, 3)$  y  $\vec{v}(0, 1, -2)$

## Solución:

$$\begin{aligned} \text{Sea } \vec{w}(2, y, z) \\ \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 - y + 3z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

$$y = -4, z = -2$$

El vector es:

$$\vec{w}(2, -4, -2)$$

66. Calcula un vector unitario que sea ortogonal a los vectores  $\vec{u}(1, 0, 2)$  y  $\vec{v}(2, 1, 0)$

## Solución:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} \\ \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 4, 1) \\ |\vec{w}| &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\text{Un vector unitario es: } \left( -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

67. Calcula el área del triángulo ABC en los siguientes casos:

- a)  $A(1, 3, -4)$ ,  $B(2, 0, -1)$  y  $C(1, 3, 0)$   
b)  $A(1, -1, 3)$ ,  $B(0, -2, 1)$  y  $C(1, 1, 1)$

## Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB}(1, -3, 3), \vec{AC}(0, 0, 4) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= (-12, -4, 0) \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10} = 6,32 \text{ u}^2 \\ \text{b) } \vec{AB}(-1, -1, -2), \vec{AC}(0, 2, -2) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= (6, -2, -2) \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} = 3,32 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

68. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

- a)  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(-1, 0, 3)$ ,  $B(2, 1, -1)$  y  $C(-3, 2, 0)$   
b)  $A(3, 2, 1)$ ,  $B(1, 2, 4)$ ,  $C(4, 0, 3)$  y  $D(1, 1, 7)$

## Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OA}(-1, 0, 3), \vec{OB}(2, 1, -1), \vec{OC}(-3, 2, 0) \\ \text{Volumen} &= \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{19}{6} = 3,17 \text{ u}^3 \\ \text{b) } \vec{AB}(-2, 0, 3), \vec{AC}(1, -2, 2), \vec{AD}(-2, -1, 6) \\ \text{Volumen} &= \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{5}{6} = 0,83 \text{ u}^3 \end{aligned}$$

## Problemas

69. Determina un vector  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  sabiendo que cumple las tres condiciones siguientes:
- La suma de sus coordenadas es 3
  - $\vec{v}$  es combinación lineal de los vectores  $(2, 2, 2)$  y  $(-1, 1, 0)$
  - Los vectores  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $\vec{v}$  son linealmente dependientes.

### Solución:

$$\vec{v}(x, y, z)$$

a)  $x + y + z = 3$

b) 
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z = 0$$

c) 
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z = 0$$

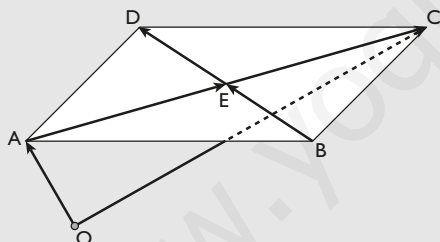
Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$$x = 1, y = 1, z = 1$$

70. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son  $A(1, 1, 1)$  y  $B(0, 2, 0)$ . Si el centro del paralelogramo es  $E(0, 0, 1)$ , se pide:
- las coordenadas de los otros vértices.
  - el área del paralelogramo.

### Solución:

a)



Los puntos C y D deben ser simétricos de A y B con respecto al centro E, respectivamente. Se debe cumplir:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{AE}(-1, -1, 0)$$

$$\vec{AC} = 2\vec{AE} = (-2, -2, 0)$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = (1, 1, 1) + (-2, -2, 0) = (-1, -1, 1)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$$

$$\vec{BD} = 2\vec{BE} = (0, -4, 2)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD} = (0, 2, 0) + (0, -4, 2) = (0, -2, 2)$$

b)  $\vec{AB}(-1, 1, -1)$ ,  $\vec{AD}(-1, -3, 1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (-2, 2, 4)$$

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{6} = 4,90 \text{ u}^2$$

71. Sabiendo que  $|\vec{u}| = 3$  y  $|\vec{v}| = 5$ , halla los posibles valores del parámetro real  $a$  para que los vectores  $\vec{u} + a\vec{v}$  y  $\vec{u} - a\vec{v}$  sean ortogonales.

### Solución:

$$(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - a\vec{u} \cdot \vec{v} + a\vec{v} \cdot \vec{u} - a^2\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

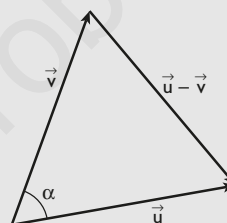
$$|\vec{u}|^2 - a^2|\vec{v}|^2 = 0$$

$$9 - 25a^2 = 0$$

$$a = \pm 3/5$$

72. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia,  $|\vec{u} - \vec{v}|$ ?

### Solución:



Si  $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ , el triángulo formado por dichos vectores es equilátero. Luego el ángulo  $\alpha = 60^\circ$

73. Calcula los valores de  $x$  e  $y$  para que el vector  $(x, y, 1)$  sea ortogonal a los vectores  $(3, 2, 0)$  y  $(2, 0, -1)$

### Solución:

$$(x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

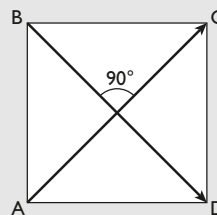
$$(x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones:

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{4}$$

74. Demuestra que el cuadrilátero con los vértices en los puntos  $A(-3, 5, 6)$ ,  $B(1, -5, 7)$ ,  $C(8, -3, -1)$  y  $D(4, 7, -2)$  es un cuadrado.

### Solución:



$$\vec{AC}(11, -8, -7)$$

$$\vec{BD}(3, 12, -9)$$

# Ejercicios y problemas

Se tiene que cumplir que  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$  y que el ángulo que forman sea  $90^\circ$

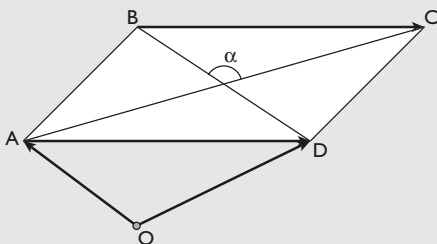
$$|\vec{AC}| = 3\sqrt{26}$$

$$|\vec{BD}| = 3\sqrt{26}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 33 - 96 + 63 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

75. Halla el ángulo  $\alpha$  que forman las diagonales AC y BD de un paralelogramo si tres vértices están en los puntos A(2, 1, 3), B(5, 2, -1) y C(-3, 3, -3)

**Solución:**



Se calcula el vértice D:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-8, 1, -2)$$

$$\vec{OD} = (2, 1, 3) + (-8, 1, -2) = (-6, 2, 1)$$

$$D(-6, 2, 1)$$

$$\vec{AC}(-5, 2, -6)$$

$$\vec{BD}(-11, 0, 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{-5 \cdot (-11) + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 2}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-11)^2 + 0^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{43}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{125}} = \frac{43}{\sqrt{8125}}$$

$$\alpha = 61^\circ 30' 27''$$

76. Halla las coordenadas del vector  $\vec{a}(x, y, z)$ , que es perpendicular a los vectores  $\vec{u}(2, 3, -1)$  y  $\vec{v}(1, -2, 3)$  y que  $\vec{a} \cdot \vec{w} = -6$ , siendo  $\vec{w}(2, -1, 1)$

**Solución:**

$$\vec{a}(x, y, z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{w} = -6 \Rightarrow 2x - y + z = -6$$

Resolviendo el sistema:

$$x = -3, y = 3, z = 3$$

77. Un cuadrilátero tiene los vértices en los puntos A(1, -2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1) y D(-5, -5, 3). Demuestra que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

**Solución:**

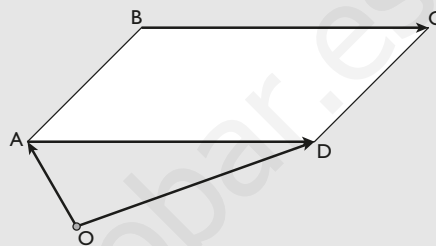
$$\vec{AC}(-5, 3, -1)$$

$$\vec{BD}(-6, -9, 3)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 30 - 27 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

78. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice y calcula el área del paralelogramo.

**Solución:**



Se calcula el vértice D:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-1, 1, 1)$$

$$\vec{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$$

$$D(0, 2, 2)$$

$$\vec{AB}(1, 1, 1)$$

$$\vec{AD}(-1, 1, 1)$$

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

## Para profundizar

79. Dados los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  tales que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$  y  $|\vec{c}| = 4$  y  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , calcula la siguiente suma de productos escalares:  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

**Solución:**

Si se multiplica  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ , se tiene:

a)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$ , ya que  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

b)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) =$$

$$= 9 + 1 + 16 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

Se tiene:

$$9 + 1 + 16 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -13$$

80. Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  vectores ortogonales y de módulo 1. Halla los posibles valores del parámetro real  $a$  para que los vectores  $\vec{u} + a\vec{v}$  y  $\vec{u} - a\vec{v}$  formen un ángulo de  $60^\circ$

**Solución:**

$$\cos 60^\circ = \frac{(\vec{u} + a\vec{v})(\vec{u} - a\vec{v})}{|\vec{u} + a\vec{v}| \cdot |\vec{u} - a\vec{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-a\vec{v}) + (a\vec{v}) \cdot \vec{u} - a^2(\vec{v} \cdot \vec{v})}{\sqrt{(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} + a\vec{v})} \sqrt{(\vec{u} - a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v})}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + a(\vec{v} \cdot \vec{u}) - a^2|\vec{v}|^2}{\sqrt{|\vec{u}|^2 + a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + a(\vec{v} \cdot \vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u} \cdot \vec{v}) - a(\vec{v} \cdot \vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$1 + a^2 = 2 - 2a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

81. Sean los puntos  $A(1, k, 0)$ ;  $B(1, 1, k - 2)$  y  $C(1, -1, k)$
- Comprueba que los tres puntos no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome  $k$
  - Halla el área del triángulo determinada por los tres puntos.

**Solución:**



- a) Si los tres puntos estuvieran alineados, los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$  estarían en la misma dirección, es decir, sus coordenadas serían proporcionales:

$$\vec{AB}(0, 1 - k, k - 2)$$

$$\vec{BC}(0, -2, 2)$$

$$\frac{1 - k}{-2} = \frac{k - 2}{2}$$

$$2 - 2k = -2k + 4 \Rightarrow 2 = 4$$

Es una contradicción.

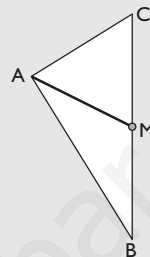
Luego los puntos no están alineados.

b)  $\vec{AB} \times \vec{BC} = (-2, 0, 0)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = 1 \text{ unidad cuadrada.}$$

82. En el triángulo formado por los vértices  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(4, 2, -5)$  y  $C(-4, 0, 3)$ , calcula la longitud de la mediana trazada desde el vértice A

**Solución:**



La longitud de la mediana es el módulo del vector  $\vec{AM}$ , siendo M el punto medio del lado BC

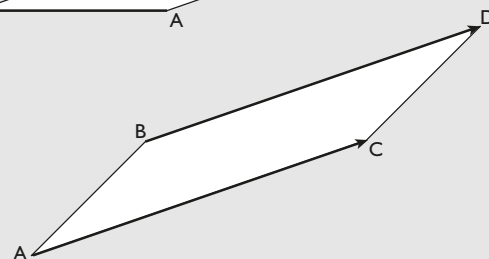
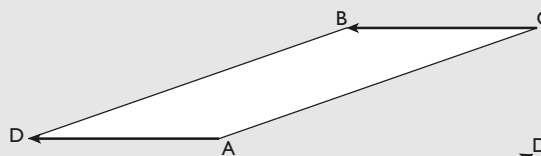
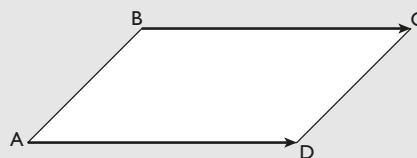
$$M(0, 1, -1)$$

$$\vec{AM}(-3, 2, -6)$$

$$|\vec{AM}| = 7 \text{ unidades.}$$

83. Dados los puntos  $A(1, -1, 3)$ ,  $B(1, 2, 1)$  y  $C(1, 0, -1)$ , halla las coordenadas de todos los puntos posibles D para que ABCD formen un paralelogramo.

**Solución:**



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = (1, -1, 3) + (0, -2, -2) = (1, -3, 1)$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{CB} = (1, -1, 3) + (0, 2, 2) = (1, 1, 5)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{AC} = (1, 2, 1) + (0, 1, -4) = (1, 3, -3)$$

# Ejercicios y problemas

84. Se considera el tetraedro cuyos vértices son los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(-2, 1, 0)$  y  $D(0, 1, 3)$ .
- Calcula el área del triángulo ABC
  - Calcula el volumen del tetraedro ABCD

**Solución:**

a)  $\vec{AB}(0, 1, 1)$

$\vec{AC}(-3, 1, 0)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \text{ u}^2$$

b)  $\vec{AD}(-1, 1, 3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{7}{6} = 1,17 \text{ u}^3$$

85. Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base el triángulo ABC y por vértice el punto  $D(3, -1, 1)$ , siendo  $A(5, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  y  $C(0, 0, -5)$

**Solución:**

$\vec{AB}(-5, 1, 0)$

$\vec{AC}(-5, 0, -5)$

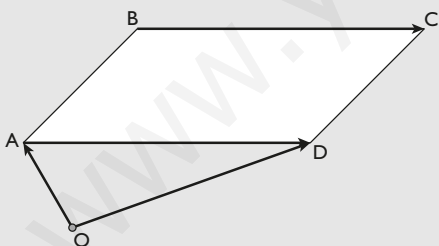
$\vec{AD}(-2, -1, 1)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 20/3 = 6,67 \text{ u}^3$$

86. Los puntos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(3, 2, 1)$  y  $C(-7, 1, 5)$  son los vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD
- Halla las coordenadas del vértice D
  - Halla el área del paralelogramo.

**Solución:**

$A(1, 0, -1)$ ,  $B(3, 2, 1)$  y  $C(-7, 1, 5)$



- a) Se calcula el vértice D:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$\vec{BC}(-10, -1, 4)$

$$\vec{OD} = (1, 0, -1) + (-10, -1, 4) = (-9, -1, 3)$$

$D(-9, -1, 3)$

- b)  $\vec{AB}(2, 2, 2)$

$\vec{AD}(-10, -1, 4)$

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{302} = 34,76 \text{ u}^2$$

87. Se consideran los puntos  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 3, 1)$  y  $D(5, 8, 3)$ . Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD. Interpreta el resultado. (No hay errores en los datos).

**Solución:**

$\vec{AB}(1, 2, 1)$

$\vec{AC}(2, 3, 1)$

$\vec{AD}(5, 8, 3)$

$$\text{Área} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 0$$

Los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  y  $\vec{AD}$  son linealmente dependientes, es decir, los cuatro puntos, A, B, C y D, están en el mismo plano.

88. Se consideran los puntos  $A(1, -3, 1)$ ;  $B(2, 3, 1)$ ;  $C(1, 3, -1)$  y  $D(0, 0, 0)$ . Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

**Solución:**

$\vec{AB}(1, 6, 0)$

$\vec{AC}(0, 6, -2)$

$\vec{AD}(-1, 3, -1)$

$$\text{Área} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 2 \text{ unidades cúbicas.}$$



**Paso a paso**

89. Halla el módulo del vector  $\vec{v}(3, -2, 5)$  y representa el vector.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

90. Halla el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos  $A(3, 2, 5)$ ,  $B(-5, 1, 3)$  y  $C(-1, 6, 4)$ . Representa el triángulo y el baricentro.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

91. Calcula el valor de  $k$  para que el vector  $(7, 4, k)$  sea perpendicular al vector  $(-2, -1, 6)$ . Representálos.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

92. Calcula el producto vectorial de los vectores  $\vec{u}(3, -1, 2)$  y  $\vec{v}(4, 2, 5)$ . Representa los vectores y el producto vectorial.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

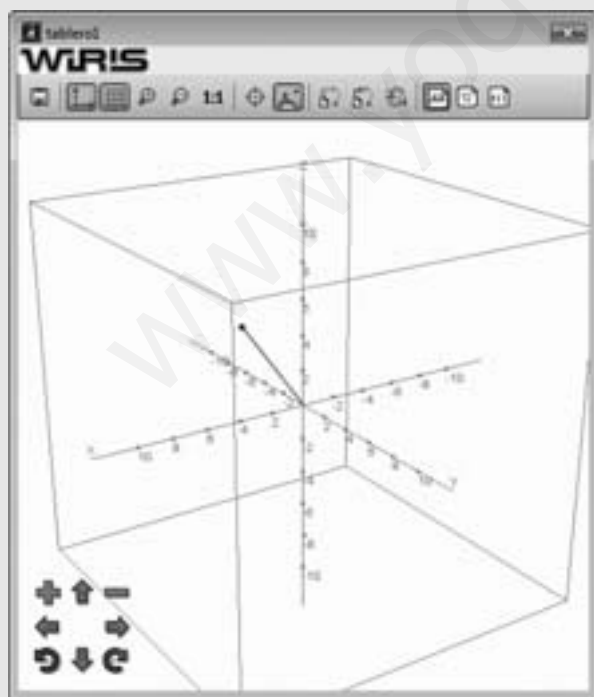
93. **Internet.** Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige **Matemáticas, curso y tema.**

**Practica**

94. Dibuja el vector de posición del punto  $P(2, -3, 4)$

**Solución:**

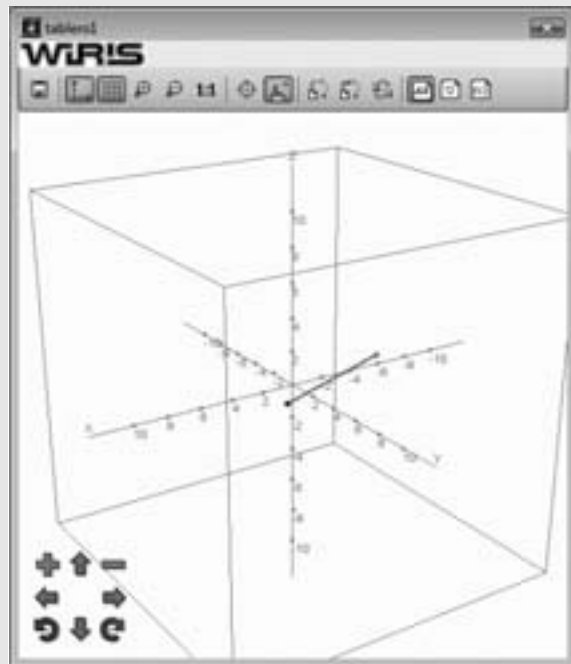
```
Ejercicio 94
O := punto(0, 0, 0) → punto(0,0,0)
P := punto(2, -3, 4) → punto(2,-3,4)
dibujar3d(P, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, P), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



95. Dados los puntos  $A(3, 4, 1)$  y  $B(-2, 5, 3)$ , representa el vector  $\vec{AB}$

**Solución:**

```
Ejercicio 95
A := punto(3, 4, 1) → (3,4,1)
B := punto(-2, 5, 3) → (-2,5,3)
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```

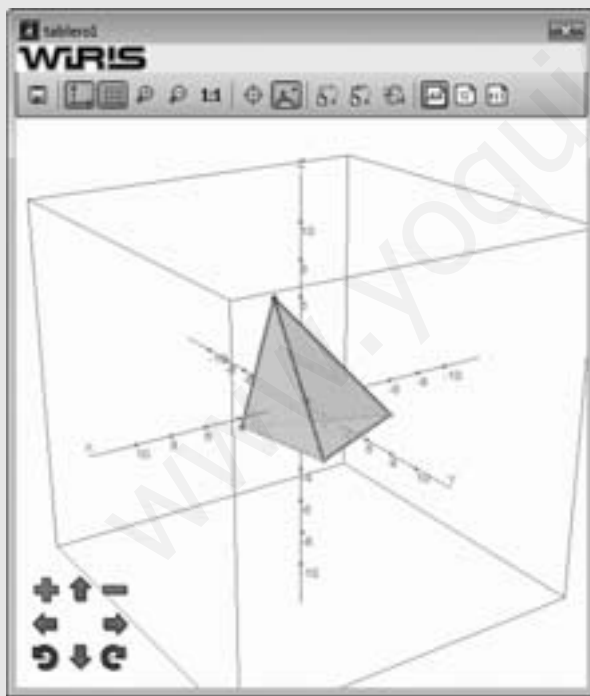


96. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos  $A(2, -3, -2)$ ,  $B(2, 5, -1)$ ,  $C(-3, 4, 0)$  y  $D(3, 2, 7)$ . Dibuja el tetraedro y el centro de gravedad.

**Solución:**

```
Ejercicio 96
A := punto(2, -3, -2) → punto(2, -3, -2)
B := punto(2, 5, -1) → punto(2, 5, -1)
C := punto(-3, 4, 0) → punto(-3, 4, 0)
D := punto(3, 2, 7) → punto(3, 2, 7)
G := (A + B + C + D) / 4 → (A + B + C + D) / 4

dibujar3d(A, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = cian}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = rosa}) → tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) → tablero1
dibujar3d(G, {color = rojo}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



97. Halla el producto escalar de los vectores  $\vec{u}(5, -3, 2)$  y  $\vec{v}(2, 1, 4)$

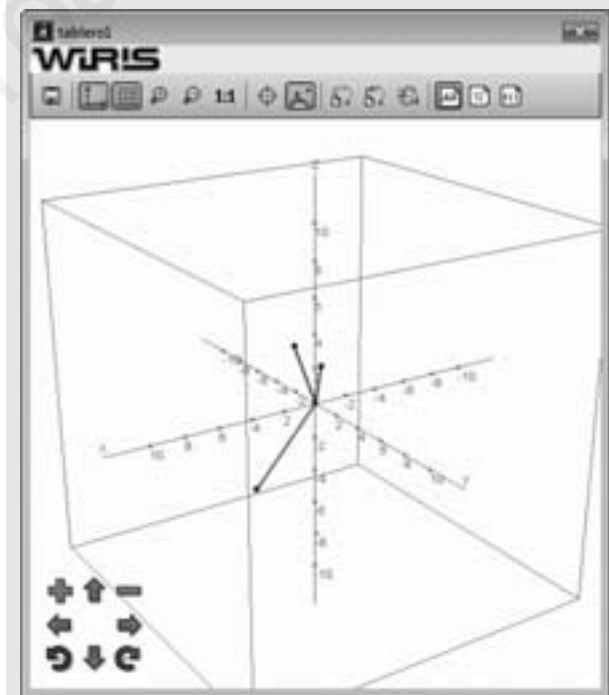
**Solución:**

```
Ejercicio 97
[5, -3, 2] · [2, 1, 4] → 15
```

98. Halla un vector perpendicular a los vectores  $\vec{u}(1, 2, 3)$  y  $\vec{v}(2, 1, 4)$ . Representa los tres vectores.

**Solución:**

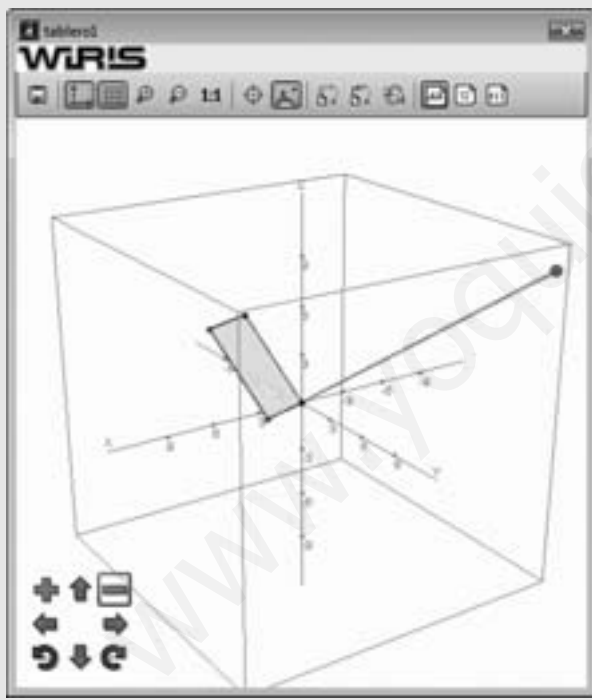
```
Ejercicio 98
[1, 2, 3] × [2, 1, 4] → [5, 2, -3]
O := punto(0, 0, 0) → punto(0, 0, 0)
A := punto(1, 2, 3) → punto(1, 2, 3)
B := punto(2, 1, 4) → punto(2, 1, 4)
C := punto(5, 2, -3) → punto(5, 2, -3)
dibujar3d(O, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, A), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, C), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



99. Halla y dibuja el área del paralelogramo definido por los vectores  $\vec{AB}(2, -3, 5)$  y  $\vec{AC}(3, 1, 0)$ .

**Solución:**

```
Ejercicio 99
[2, -3, 5] x [3, 1, 0] => [-5, 15, 11]
|[-5, 15, 11]| => sqrt(371)
sqrt(371) => 19.261
Área = 19,26 u²
A := punto(0, 0, 0) => punto(0,0,0)
B := punto(2, -3, 5) => punto(2,-3,5)
C := punto(3, 1, 0) => punto(3,1,0)
D := B + C => B+C
E := punto(-5, 15, 11) => punto(-5,15,11)
dibujar3d(A, {color = negro}) => tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) => tablero1
dibujar3d(C, {color = rojo}) => tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) => tablero1
dibujar3d(E, {color = rojo, tamaño_punto = 10}) => tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, D, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(segmento(A, E), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



100. Calcula el producto mixto de los vectores  $\vec{u}(1, 2, -3)$ ,  $\vec{v}(4, 1, 1)$  y  $w(5, -2, 6)$

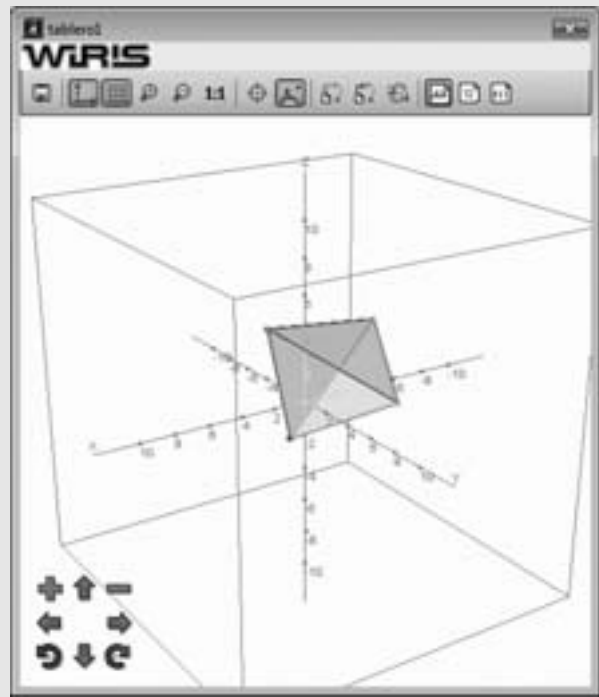
**Solución:**

```
Ejercicio 100
| 1 2 -3 |
| 4 1 1  | => 9
| 5 -2 6  |
```

101. Halla el volumen del tetraedro definido por los puntos A(1, 0 -2), B(3, 1, 5), C(-4, 3, 0), D(-6, -2, 3). Dibuja el tetraedro.

**Solución:**

```
Ejercicio 101
A := punto(1, 0, -2) => punto(1,0,-2)
B := punto(3, 1, 5) => punto(3,1,5)
C := punto(-4, 3, 0) => punto(-4,3,0)
D := punto(-6, -2, 3) => punto(-6,-2,3)
AB = vector(A, B) => [2,1,7]
AC = vector(A, C) => [-5,3,2]
AD = vector(A, D) => [-7,-2,5]
| 2 1 7 |
| -5 3 2 | => 266
| -7 -2 5 |
266
-----
6 => 44.333
Volumen = 44,33 u³
dibujar3d(A, {color = rojo}) => tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) => tablero1
dibujar3d(C, {color = cian}) => tablero1
dibujar3d(D, {color = rosa}) => tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



102. Considera los vectores  $\vec{u}(1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}(2, 2, a)$  y  $\vec{w}(2, 0, 0)$ . Determina los valores de **a** para que los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{w}$  sean ortogonales.

**Solución:**

Ejercicio 102

$$\mathbf{u} = [1, 1, 1] \Rightarrow [1, 1, 1]$$

$$\mathbf{v} = [2, 2, a] \Rightarrow [2, 2, a]$$

$$\mathbf{w} = [2, 0, 0] \Rightarrow [2, 0, 0]$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \Rightarrow a + 1$$

$$\text{resolver}(a + 1 = 0) \Rightarrow \{\{a = -1\}\}$$

103. Dados los vectores  $\vec{u}(2, 1, -1)$ ,  $\vec{v}(-3, 5, 1)$  y  $\vec{w}(4, k, 2)$ , calcula el valor de **k** para que el volumen del paralelepípedo definido por dichos vectores sea igual a 26 unidades cúbicas.

**Solución:**

Ejercicio 103

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow k + 50$$

$$\text{resolver}(|k + 50| = 26) \Rightarrow \{\{k = -76\}, \{k = -24\}\}$$

www.yoquieroaprobar.es

