

Problemas propuestos

Operaciones con matrices

1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}$, halla dos números a y b para que se verifique que $a \cdot A + b \cdot B = C$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, X e Y , que cumplan:
$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = 2B \end{cases}$$

3. (Propuesto en Selectividad 2011, Canarias)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases}$$

4. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

- a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ b) $A(B + C) = AB + AC$
 c) $(A - B)C = AC - BC$ d) $A(BC) = (AB)C$

5. Calcula, si es posible, los productos AB y BA para las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = (2 \ 3 \ -1)$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, halla los productos AB y BA . Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba que $AB = AC$, y sin embargo, $B \neq C$.

8. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

Potencia de una matriz

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A^2 = 2A - I_2$.

b) Aplicando el apartado a) halla la matriz A^6 .

10. a) Halla las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3 = A$.

b) Para esas matrices y para el valor $a = -2$, calcula $A^{10} + A^{11} + A^{12}$.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n . ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n . ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

13. Halla la expresión general de A^n en los siguientes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba que para todo n natural se cumple que

$$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que para todo n natural se cumple que

$$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación de algunas propiedades

16. Halla los valores de a para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

17. Halla el valor de a para que sea ortogonal la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Recuerda: Una matriz A es ortogonal si $A \cdot A^t = I$).

18. Demuestra que si las matrices A y B son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

19. Demuestra que si P y Q son matrices cuadradas tales que $P \cdot Q = Q^2 \cdot P$, entonces $(P \cdot Q)^2 = Q^6 \cdot P^2$.

20. Dada las matrices $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$, demuestra las propiedades:

$$1) (A^t)^t = A \quad 2) (A+B)^t = A^t + B^t \quad 3) (kA)^t = kA^t$$

21. Comprueba las propiedades anteriores para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Dada las matrices $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{rs})_{m \times p}$, demuestra la propiedad 4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

23. Comprueba la propiedad anterior para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$.

Rango de una matriz

25. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

26. Determina, en función de los valores de a , el rango de las matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

27. Determina, en función de los valores de a , b y c , el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}.$$

Inversa de una matriz

28. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

29. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

30. Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

31. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Soluciones

1. $a = 2; b = 3.$

2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}.$

3. $X = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}; Y = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$

5. a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$ b) $AB = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -16 & 2 & -2 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}.$

c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$ d) $BA = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$ e) $AB = -11; BA = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$

f) $AB = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 \\ -2 & -8 & 15 \\ 5 & -14 & 6 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 5 \\ 27 & -10 & 1 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

6. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$ El producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}; AC = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$

8. $a = 4.$

9. $A^6 = \begin{pmatrix} 25 & -48 \\ 12 & -23 \end{pmatrix}.$

10. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}.$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$

11. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$

12. $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A \cdot \begin{pmatrix} -9 & -10a \\ 0 & 11 \end{pmatrix}.$

13. a) $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A.$ b) No puede darse una fórmula para la potencia A^n , pero puede observarse que en los elementos a_{12} , a_{21} y a_{22} aparecen los términos de la sucesión de

Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

16. $a = 2.$

17. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$

24. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}.$

25. a) 2. b) 2. c) 2.

26. a) 2 para cualquier valor de a . b) 2 si $a = 1$; 3 en los demás casos. c) 2 si $a = \pm 1$; 3 en los demás casos.

27. Si a, b y c son iguales, el rango es 1. Si a, b y c no son iguales, el rango es 2.

28. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$. c) No es invertible.

29. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$. c) No tiene inversa.

30. $A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

31. $\lambda = \pm 3$.