TEMA 1 – SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

RESOLVER E INTERPRETAR GEOMÉTRICAMENTE SISTEMAS LINEALES

<u>EJERCICIO 1</u> : Resuelve los siguientes sistemas y haz una interpretación geométrica de los mismos:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=5 \\ x+4y=4 \\ -x-2y=-3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} -x+3y-z=4 \\ x+4y=5 \\ 2x-6y+2z=3 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \\ x-8y+5z=-6 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 3x-y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} 3x-z=4 \\ y+3x=2 \end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x-3z=5 \\ 2y+5z=2 \end{array}\right\}$

Solución:

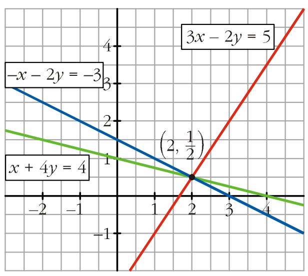
a) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 3\cdot 1^a-2^a \\ 1^a+3^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-7\cdot 3^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y=4 \\ 2y=1 \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{1}{2};\ x+2=4 \rightarrow x=2$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$.

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$:



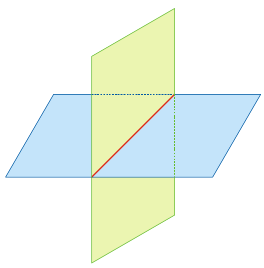
b) Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Pasando la x al 2º miembro en las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 2z=3-x \\ y=2-x \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x \\ y=2-x \end{array}$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son:

$x=\lambda,\ \ y=2-\lambda,\ \ z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\ $ con $\lambda\in\mathbf{R}$

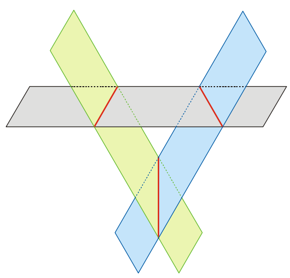
Geométricamente, son dos planos que se cortan a lo largo de una recta:



c) En primer lugar, lo resolvemos mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a+2\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} -x+3y-z=4 \\ 7y-z=9 \\ 0x+0y+0z=11 \end{array}$$

La última ecuación es imposible. El sistema es incompatible. Geométricamente, el sistema representa tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres.



d) Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

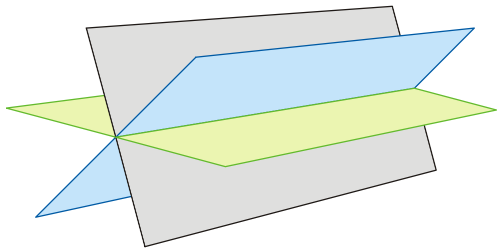
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -8 & 5 & -6 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -8 & 5 & -6 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a-1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & -10 & 6 & -10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+2y-z=4 \\ -5y+3z=-5 \end{array}\right\}$$ Pasamos la z al 2^o miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4+z \\ -5y=-5-3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4+z-2y=4+z-2\left(1+\frac{3}{5}z\right)=2-\frac{1}{5}z \\ y=1+\frac{3}{5}z \end{array}$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=2-\frac{1}{5}\lambda,\quad y=1+\frac{3}{5}\lambda,\quad z=\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$

Geométricamente, representa tres planos que tienen una recta en común:

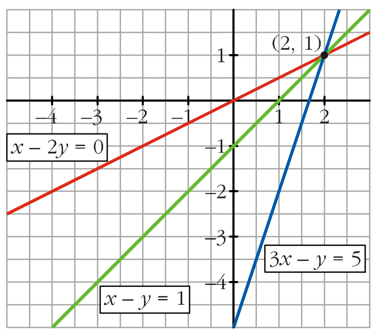


e) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-3\cdot 1^a \\ 3^a-1^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-5\cdot 3^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \to \left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2y=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $(2, 1)$.

Geométricamente, representa tres rectas que se cortan en el punto $(2, 1)$:

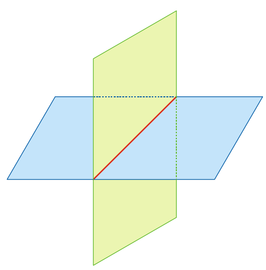


f) Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres ncógnitas. Pasando la z al $2^{\underline{o}}$ miembro en las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 3x=4+z \\ y=2-3z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}z \\ y=2-3z \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\lambda,\quad y=2-3\lambda,\quad z=\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$

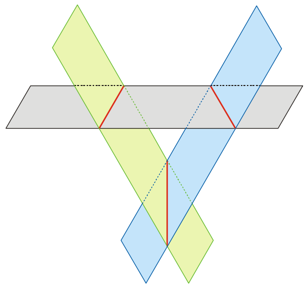
Geométricamente, son dos planos que se cortan a lo largo de una recta:



g) Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&0&-3&5\\0&2&5&2\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a-2\cdot1^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-2&-5&3\\0&2&5&2\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\2^a+3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-2&-5&3\\0&0&0&5\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\-2y-5z=3\\0x+0y+0z=5\end{array}\right\}$$

La última ecuación es imposible. El sistema es incompatible.



Geométricamente, representa tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres.

<u>EJERCICIO 2</u> : Utiliza el método de Gauss para resolver los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}4x+y-2z=-3\\3x-y+4z=-2\\-x+y+z=5\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}-x+y-z=-2\\x-y+2z=4\\x+z+t=3\\x+2z+t=1\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}-3x+y+z=1\\x-2y+z=4\\-x+y-3z=-7\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2x-y+z=3\\3x+y-z=-3\\x-3y+3z=9\\2x+4y-4z=-12\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=6\\x-y+2z=-1\\-x+3y\qquad=1\end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r}x-y+z+t=0\\x+y+z-t=2\\x-y-z+t=2\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}5x-y+3z=-6\\x+3y-z=10\\2x-y+4z=-2\end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r}2x-y+z=5\\3x+2y=1\\-x+4y-2z=-9\\6x+11y-3z=-11\end{array}\right\}$ **i)** $\left.\begin{array}{r}-3x+y-z=-4\\5x-2y+z=6\\-x+y+3z=0\end{array}\right\}$ **j)** $\left.\begin{array}{r}x+2y+z+t=3\\-x+y\qquad+2t=-1\\-x+7y+2z+8t=1\end{array}\right\}$

Solución:

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&-2&-3\\3&-1&4&-2\\-1&1&1&5\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}3^a\\1^a\\2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&5\\4&1&-2&-3\\3&-1&4&-2\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a+4\cdot1^a\\3^a+3\cdot1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&5\\0&5&2&17\\0&2&7&13\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\5\cdot3^a-2\cdot2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&5\\0&5&2&17\\0&0&31&31\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y+z=5\\5y+2z=17\\31z=31\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=y+z-5=3+1-5=-1\\y=\dfrac{17-2z}{5}=\dfrac{17-2}{5}=3\\z=\dfrac{31}{31}=1\end{array}\right\}$$

La solución es $(-1, 3, 1)$.

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&-1&0&-2\\1&-1&2&0&4\\1&0&1&1&3\\1&0&2&1&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a+1^a\\3^a+1^a\\4^a+1^a\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&-1&0&-2\\0&0&1&0&2\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&-1\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\3^a\\4^a-3^a\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&-1&0&-2\\0&0&1&0&2\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-2\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y-z=-2\\z=2\\y+t=1\\z=-2\end{array}\right\}$$

La 2^o y la 4^o son ecuaciones contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 3\cdot 1^a - 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ -3^a \\ 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 5\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=4 \\ y+2z=3 \\ 14z=28 \end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{28}{14}=2 \\ y=3-2z=3-4=-1 \\ x=2y-z+4=-2-2+4=0 \end{array}\right.$$

La solución es (0, –1, 2).

d) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3\cdot 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \\ 4^a - 2\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a : 10 \\ 3^a : 5 \\ 4^a : 10 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+3z=9 \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$$

Pasamos la z al 2^o miembro: $$\left.\begin{array}{r} x-3y=9-3z \\ y=-3+z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3y+9-3z=3(-3+z)+9-3z=0 \\ y=-3+z \end{array}$$

Las soluciones del sistema son: $x = 0$, $y = -3 + \lambda$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbf{R}$

e) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ \frac{1}{2}\cdot 3^a \\ 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-1 \\ y+z=0 \\ -8z=8 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{8}{-8}=-1 \\ y+z=0 \;\rightarrow\; y-1=0 \;\rightarrow\; y=1 \\ x-y+2z=-1 \;\rightarrow\; x=-1+y-2z=-1+1+2=2 \end{array}\right.$$ $\Rightarrow$ La solución del sistema es (2, 1, –1).

f) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ \frac{1}{2}\cdot 2^a \\ -\frac{1}{2}\cdot 3^a \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=-t \\ y\quad =1+t \\ z=1 \end{array}\right\} x=-t+y-z=-t+1+t+1=2$$

Las soluciones del sistema son: $x = 2$, $y = 1 + \lambda$, $z = -1$, $t = \lambda$, con $\lambda \in \mathbf{R}$

g) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 5 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} - 5\cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 2\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -16 & 8 & -56 \\ 0 & -7 & 6 & -22 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} : (-8) \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 6 & -22 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 7\cdot 2^{a} + 2\cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+3y-z=10 \\ 2y-z=7 \\ 5z=5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=10-3y+z=10-12+1=-1 \\ 2y=7+z=7+1=8 \to y=4 \\ z=1 \end{array}\right\} \text{ La solución es } (-1,\ 4,\ 1).$$

h) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -9 \\ 6 & 11 & -3 & -11 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \\ 4^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 11 & -3 & -11 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} + 3\cdot 1^{a} \\ 3^{a} + 2\cdot 1^{a} \\ 4^{a} + 6\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 14 & -6 & -26 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 35 & -15 & -65 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} - 2\cdot 3^{a} \\ 4^{a} - 5\cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} -x+4y-2z=-9 \\ 7y-3z=-13 \end{array}\right\} \text{ Pasamos la } z \text{ al } 2^{o} \text{ miembro: } \left.\begin{array}{r} -x+4y=-9+2z \\ 7y=-13+3z \end{array}\right\} \to y=\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}z \to$$

$$\to x=4y+9-2z=4\left(\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}z\right)+9-2z=\frac{-52}{7}+\frac{12}{7}z+9-2z=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}z$$

Las soluciones del sistema son: $x=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}\lambda,\quad y=\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}\lambda,\quad z=\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$

i) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 3^{a} \\ 1^{a} \\ 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} - 3\cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 5\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & -4 \\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} : (-2) \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3\cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} -x+y+3z=0 \\ y+5z=2 \\ z=0 \end{array}\right\} \to\to \left.\begin{array}{l} x=y+3z=2 \\ y=2-5z=2 \\ z=0 \end{array}\right\} \text{ La solución es } (2,\ 2,\ 0).$$

j) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3\cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+2y+z+t=3 \\ 3y+z+3t=2 \\ 0x+0y+0z+0t=-2 \end{array}\right\}$$

La última ecuación es imposible. Por tanto, el sistema es incompatible.

CUESTIONES CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIO 3 :

a) Razona si los siguientes sistemas son equivalentes o no: $\mathbf{I}: \begin{cases} x - 3y + 4z = 7 \\ 3x + \quad 2z = 0 \end{cases}$ $\quad \mathbf{II}: \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

b) Añade una ecuación al sistema I, de modo que el nuevo sistema resultante sea incompatible. Justifica tu respuesta.

Solución:

a) El segundo sistema es compatible determinado. Tiene como única solución (–2, 1, 3), que también es solución del sistema I.

Sin embargo, el sistema I tiene, además de (–2, 1, 3), infinitas soluciones más, es compatible indeterminado. Por tanto, los dos sistemas no son equivalentes.

b) Para que sea incompatible, debemos añadir una ecuación de la forma: $a(x - 3y + 4z) + b(3x + 2z) = k$, con $k \neq 7a$

Por ejemplo, si tomamos $a = 1$, $b = 1$: $4x - 3y + 6z = 3$

Añadiendo esta ecuación, el nuevo sistema es incompatible.

EJERCICIO 4 : Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y \quad = 3 \end{array}\right\}$

Si es posible, añade una ecuación de modo que el nuevo sistema resultante sea:
a) Incompatible **b) Compatible indeterminado**
Justifica tus respuestas.

Solución:

a) Una ecuación que haga el sistema incompatible ha de ser de la forma:
$a(2x - y + z) + b(-x + 2y) = k$, con $k \neq 5a + 3b$

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 1$, tenemos: $x + y + z = 4$

Añadiendo esta ecuación, el sistema es incompatible.

b) Para que sea compatible indeterminado, la ecuación que añadamos será de la forma:
$a(2x - y + z) + b(-x + 2y) = 5a + 3b$ (una combinación lineal de las dos que tenemos)

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 1$, quedará: $x + y + z = 8$

Añadiendo esta ecuación, el sistema es compatible indeterminado.

EJERCICIO 5 : Pon un ejemplo, cuando sea posible, de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea:
a) compatible determinado **b) compatible indeterminado** **c) incompatible**
Justifica en cada caso tus respuestas.

Solución:

a) Si el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas, no puede ser compatible determinado; con solo dos datos (ecuaciones) no podemos averiguar tres incógnitas.

b) Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x \quad - z = 1 \end{array}\right\}$ tiene infinitas soluciones, que serían de la forma: $x = 1 + \lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbf{R}$

c) Tendrían que ser dos ecuaciones contradictorias. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$ es incompatible; no se pueden dar las dos ecuaciones a la vez.

EJERCICIO 6

a) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+y=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

b) Si es posible, añade una ecuación de modo que el nuevo sistema resultante sea:
a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Imcompatible
Justifica tus respuestas.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} -x+y=1 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}$ Sumando: $2x=2 \rightarrow x=1$
Sustituyendo $x=1$ en la 1^{a} ecuación: $-1+y=1 \rightarrow y=2$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$. Tenemos dos rectas que se cortan en el punto (1, 2).

b)
I) Si añadimos una ecuación que sea combinación lineal de las dos que tenemos, el nuevo sistema seguirá siendo compatible determinado. La nueva recta pasaría también por (1, 2). La solución del sistema seguirá siendo la misma. Por ejemplo, si sumamos las dos ecuaciones que tenemos, obtenemos $2x = 2$.
Añadiendo esta ecuación, seguirá siendo compatible determinado (y con la misma solución).
II) Es imposible, pues las dos rectas que tenemos solo tienen en común el punto (1, 2). Añadiendo otra ecuación no podemos conseguir que estas dos rectas se corten en más puntos.
III) Para que fuera incompatible, tendríamos que añadir una ecuación que contradijera las dos que tenemos; es decir, de la forma: $a(-x+y)+b(3x-y)=k$, con $k \neq a+b$
Por ejemplo, con $a = 1$, $b = 1$: $2x = 3$
Añadiendo esta ecuación, obtendríamos un sistema incompatible.

EJERCICIO 7

a) Explica si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o incompatible: $\begin{cases} 3x-2y+4z=6 \\ -2x+4y-z=3 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$

b) ¿Podríamos conseguir que fuera compatible determinado, suprimiendo una de las ecuaciones? Razónalo.

Solución:
a) Observamos que la tercera ecuación es suma de las dos primeras, salvo en el término independiente que, en lugar de un 9, es un 1. Por tanto, la tercera ecuación contradice las dos primeras. El sistema es incompatible.
b) No. Si suprimimos una de las ecuaciones, obtendremos un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones. Este nuevo sistema podría ser compatible indeterminado (en este caso lo sería), pero no compatible determinado.

PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIO 8 : Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales *A*, *B* y *C*. El primer lingote contiene 20 g del metal *A*, 20 g del *B* y 60 del *C*. El segundo contiene 10 g de *A*, 40 g de *B* y 50 g de *C*. El tercero contiene 20 g de *A*, 40 g de *B* y 40 g de *C*. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de *A*, 35 g de *B* y 50 g de *C*.¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución:

Resumimos en una tabla los datos que nos dan:

	A	B	C	PESO TOTAL
1er LINGOTE	20 g	20 g	60 g	100 g
2º LINGOTE	10 g	40 g	50 g	100 g
3er LINGOTE	20 g	40 g	40 g	100 g

Llamamos x a los gramos que tenemos que coger del primer lingote, y a los del segundo lingote y z a los del tercero.

Como queremos conseguir 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}2z = 15 \\ 0{,}2x + 0{,}4y + 0{,}4z = 35 \\ 0{,}6x + 0{,}5y + 0{,}4z = 50 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 150 \\ 2x + 4y + 4z = 350 \\ 6x + 5y + 4z = 500 \end{array}$$

Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 2 & 4 & 4 & 350 \\ 6 & 5 & 4 & 500 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 2 & -2 & 50 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3\cdot 3^a - 2\cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -250 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + 2z = 150 \\ 3y + 2z = 200 \\ -10z = -250 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{150 - y - 2z}{2} = \dfrac{150 - 50 - 50}{2} = 25 \\ y = \dfrac{200 - 2z}{3} = \dfrac{200 - 50}{3} = 50 \\ z = 25 \end{array}$$

Por tanto, habrá que coger 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.

<u>EJERCICIO 9</u> : En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

a) Llamemos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños.

Como hay 22 personas, tenemos que: $x + y + z = 22$

Con el otro dato, planteamos otra ecuación: □$y + 3z = 2x$

Solo con estos datos no podemos saber el número de hombres (ni el de mujeres, ni el de niños) que hay. Es un sistema compatible indeterminado; como tenemos tres incógnitas, para que pueda ser compatible determinado, necesitamos otra ecuación.

b) Añadiendo una tercera ecuación con el dato que nos dan, planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ x = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3y + z = 22 \\ -2y + 3z = 0 \\ \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 22 - 3y \\ -2y + 66 - 9y = 0 \\ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 22 - 18 = 4 \\ -11y = -66 \ \rightarrow \ y = 6 \\ x = 12 \end{array}$$

Por tanto, hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

<u>EJERCICIO 10</u> : Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.

Solución:

Tenemos que:

	ROTULADOR	CUADERNO	CARPETA
PRECIO SIN DESCUENTO	x	y	z
PRECIO CON DESCUENTO	$0{,}9x$	$0{,}9y$	$0{,}9z$

Planteamos el sistema con los datos que nos dan: $\left.\begin{array}{l} 0{,}9x+0{,}9y+0{,}9z=3{,}56 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0{,}2x \end{array}\right\}$ $z=\dfrac{x}{2}+0{,}2x=0{,}5x+0{,}2x=0{,}7x$

$$0{,}9x+0{,}9\cdot\frac{x}{2}+0{,}9\cdot 0{,}7x=3{,}56 \;\rightarrow\; 0{,}9x+0{,}45x+0{,}63x=3{,}56 \;\rightarrow\; 1{,}98x=3{,}56 \;\rightarrow\; \begin{array}{l} x=1{,}80 \\ y=\dfrac{x}{2}=\dfrac{1{,}80}{2}=0{,}90 \\ z=0{,}7x=1{,}26 \end{array}$$

Por tanto, el rotulador marcaba 1,80 euros, el cuaderno, 0,90 euros y, la carpeta, 1,26 euros.

<u>EJERCICIO 11</u> : En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamamos x al número de helados de vainilla que se compran semanalmente, y al de helados de chocolate, y z al de helados de nata.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Compran 110 helados en total} \;\rightarrow\; x+y+z=110 \\ \text{Precio total 540 euros} \;\rightarrow\; 4x+5y+6z=540 \\ \text{Chocolate y nata} = 20\%\text{ más que vainilla} \;\rightarrow\; y+z=1{,}2x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 12x-10y-10z=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 6 & 540 \\ 12 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-4\cdot 1^a \\ 3^a-12\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & -22 & -22 & -1\,320 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a:(-22) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2^a-3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ z=40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=110-y-z=110-20-40=50 \\ y=100-2z=100-80=20 \\ z=40 \end{array}$$

Por tanto, se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

<u>EJERCICIO 12</u> : Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos necesitó la utilización de ciertas unidades de madera, plástico y aluminio tal y como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

	MADERA	PLÁSTICO	ALUMINIO
SILLA	1 unidad	1 unidad	2 unidades
MECEDORA	1 unidad	1 unidad	3 unidades
SOFÁ	1 unidad	2 unidades	5 unidades

Solución:

Llamamos x al número de sillas fabricadas, y al de mecedoras y z al de sofás. Así, teniendo en cuenta los datos que nos dan, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Madera} \rightarrow x+y+z=400 \\ \text{Plástico} \rightarrow x+y+2z=600 \\ \text{Aluminio} \rightarrow 2x+3y+5z=1\,500 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 1 & 1 & 2 & 600 \\ 2 & 3 & 5 & 1\,500 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 3 & 700 \end{array}\right) \rightarrow \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=400 \\ z=200 \\ y+3z=700 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=400-y-z=400-100-200=100 \\ y=700-3z=700-600=100 \\ z=200 \end{array}$$

Por tanto, se fabricaron 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

<u>EJERCICIO 13</u> : En una tienda, un cliente se ha gastado 150 euros en la compra de 12 artículos, entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 20 euros, cada libro 15 euros, y cada carpeta 5 euros. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

a) Formula el sistema de ecuaciones asociado al enunciado anterior.

b) Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución:

a) Si llamamos x al número de discos, y al número de libros y z al número de carpetas, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 20x+15y+5z=150 \\ x+z=3y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 4x+3y+z=30 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 4 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-4\cdot 1^a \\ 3^a-1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a\cdot(-1) \\ \frac{-1}{4}\cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ y+3z=18 \\ y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=3 \\ z=\dfrac{18-y}{3}=\dfrac{18-3}{3}=5 \\ x=12-y-z=12-3-5=4 \end{array}$$

Por tanto, ha comprado 4 discos, 3 libros y 5 carpetas.

<u>EJERCICIO 14</u> : Dos kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 16,75 euros. Dos kilos de naranjas, más dos kilos de plátanos, más 3 de mangos, valen 25 euros. Tres kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 17,75 euros. ¿Cuánto vale 1 kilo de naranjas? ¿Cuánto vale 1 kilo de plátanos? ¿Cuánto vale 1 kilo de mangos?

Solución:

Si llamamos x al precio de 1 kilo de naranjas, y al precio de 1 kilo de plátanos y z al de 1 kilo de mangos, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+2z=16{,}75 \\ 2x+2y+3z=25 \\ 3x+y+2z=17{,}75 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 16{,}75 \\ 2 & 2 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 2 & 17{,}75 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-2\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 16{,}75 \\ -2 & 0 & -1 & -8{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+2z=16{,}75 \\ 2x+z=8{,}5 \\ x=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ z=8{,}5-2x=8{,}5-2=6{,}5 \\ y=16{,}75-2x-2z=16{,}75-2-13=1{,}75 \end{array}$$

Por tanto, 1 kilo de naranjas vale 1 euro, 1 kilo de plátanos vale 1,75 euros y 1 kilo de mangos vale 6,5 euros.

<u>EJERCICIO 15</u> : Un estado compra 540 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27,28 y 32 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 346 000 dólares. Si del primer suministrador recibe el 30% del total de petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Solución:
Llamamos x al número de barriles que compra al primer suministrador; y al número de barriles que compra al segundo; y z al numero de barriles que compra al tercero.

Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=540\ 000 \\ 27x+28y+32z=16\ 346\ 000 \\ x=0{,}3\cdot 540\ 000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=540\ 000 \\ 27x+28y+32z=16\ 346\ 000 \\ x=162\ 000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 162\ 000 \\ 1 & 1 & 1 & 540\ 000 \\ 27 & 28 & 32 & 16\ 346\ 000 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2^{a}\cdot 32 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 162\ 000 \\ 1 & 1 & 1 & 540\ 000 \\ -5 & -4 & 0 & -934\ 000 \end{array}\right) \rightarrow$$

x = 162 000; y = 31 000; z = 347 000
Por tanto, compra 162 000 barriles al primero; 31 000 al segundo, y 347 000 al tercero.

<u>EJERCICIO 16</u> : De un número de tres cifras se sabe que la suma de estas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; y, si se intercambian las de la unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

Solución: Llamamos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas, y z a la de las unidades.
Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 100z+10y+x=(100x+10y+z)-198 \\ 100x+10z+y=(100x+10y+z)+36 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=13 \\ 99x-99z=198 \\ -9y+9z=36 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ x\quad -z=2 \\ -y+z=4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}-2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}+3^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3z=15 \ \rightarrow\ z=5 \\ x-z=2 \ \rightarrow\ x=2+z=2+5=7 \\ -y+z=4 \ \rightarrow\ y=z-4=5-4=1 \end{array}$$

x = 7, y = 1, z = 5. El número es el 715.

<u>EJERCICIO 17</u> : Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de Eusebio y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Eusebio es lo mismo que nueve veces la de Luis. Halla las tres alturas.

Solución:
Llamamos x a la altura de Luis; y a la de Eusebio; y z a la de Pablo. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+3(y-z)=z \\ x+y+z=515 \\ 8y=9x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=515 \\ x+3y-4z=0 \\ 9x-8y=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 9 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+4\cdot 1^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 5 & 7 & 0 & 2060 \\ 9 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 8\cdot 2^{a}+7\cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 9 & -8 & 0 & 0 \\ 103 & 0 & 0 & 16480 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=515 \\ 9x-8y=0 \\ 103x=16480 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=160 \\ y=\dfrac{9x}{8}=180 \\ z=515-x-y=175 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=160 \\ y=180 \\ z=175 \end{array}$$

Por tanto, Luis mide 160 cm; Eusebio, 180 cm, y Pablo, 175 cm.

<u>EJERCICIO 18</u> : La suma de las tres cifras de un número es 6; y, si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente, si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcula dicho número.

Solución:
Llamamos x a la primera cifra, y a la segunda, y z a la tercera.
Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 100y+10x+z=(100x+10y+z)+90 \\ 100x+10z+y=(100x+10y+z)+9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 90x-90y=-90 \\ 9y-9z=-9 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y=-1 \\ y-z=-1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}+3^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}-2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y=6 \\ x-y=-1 \\ y-z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=2 \\ x=-1+y=1 \\ z=y+1=3 \end{array}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. El número es 123.

<u>EJERCICIO 19</u> : Un almacén distribuye cierto producto que fabrican tres marcas distintas: *A*, *B* y *C*. La marca *A* lo envasa en cajas de 250 g y su precio es de 1 euro; la marca *B* lo envasa en cajas de 500 g a un precio de 180 céntimos de euro; y, la marca *C*, lo hace en cajas de 1 kg a un precio de 330 céntimos. El almacén vende a un cliente 2,5 kg de este producto por un importe de 8,9 euros. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, calcula cuántos envases de cada tipo se han comprado.

Solución:
Llamamos x al número de envases que se han comprado de la marca A; y al número de envases de la marca B; y z al número de envases de la marca C.
Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \text{ cajas} \\ 0{,}25x+0{,}5y+z=2{,}5 \text{ kg} \\ x+1{,}8y+3{,}3z=8{,}9 \text{ euros} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 & 8{,}9 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}\cdot 4-1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0{,}8 & 2{,}3 & 3{,}9 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-0{,}8\cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ y+3z=5 \\ -0{,}1z=-0{,}1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=1 \\ y=5-3z=5-3=2 \\ x=5-y-z=5-2-1=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}$$

Por tanto, se han comprado 2 envases de la marca A, 2 de la marca B y 1 de la marca C.

SISTEMAS CON PARÁMETROS

<u>EJERCICIO 20</u> : Discute el siguiente sistema en función del parámetro, y resuélvelo cuando sea posible:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x-5y+(a+5)z=0} \\ \mathbf{3x+3y\quad -z=0} \\ \mathbf{3x+4y\quad +6z=0} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x-5y-z=-4} \\ \mathbf{x-y+z=6} \\ \mathbf{3x-5y+az=31} \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x+3y+5z=8} \\ \mathbf{2x+2y+mz=6} \\ \mathbf{x+y+2z=3} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x-y-17z=0} \\ \mathbf{x+2y+mz=5} \\ \mathbf{x\quad -5z=1} \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+5y-6z=19} \\ \mathbf{3x-6y+az=-16} \\ \mathbf{x\quad -z=1} \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & a+5 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^a \\ 3^a \\ 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & a+5 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3\cdot 3^a-2\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -21 & 3a+17 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+21\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+164 & 0 \end{array}\right)$

- Si $3a+164=0$, es decir, si $a=\dfrac{-164}{3}$, el sistema queda:

$\left.\begin{array}{r} 3x+3y-z=0 \\ y+7z=0 \end{array}\right\}$ Pasamos la z al 2º miembro: $\left.\begin{array}{r} 3x+3y=z \\ y=-7z \end{array}\right\}$ $x=\dfrac{z-3y}{3}=\dfrac{z+21z}{3}=\dfrac{22z}{3}$; $y=-7z$

Sería compatible indeterminado, con soluciones: $x=\dfrac{22}{3}\lambda,\quad y=-7\lambda,\quad z=\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$

- Si $a\neq\dfrac{-164}{3}$, sería compatible determinado. Su única solución sería $(0,\ 0,\ 0)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & a & 31 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & -5 & a & 31 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-3\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a:(-2) \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{array}\right)$

- Si $a=2$, quedaría $0z=18$. Por tanto, el sistema sería incompatible.
- Si $a\neq 2$, el sistema sería incompatible determinado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ 2y+z=5 \\ (a-2)z=18 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=y-z+6=\dfrac{5a-28}{2a-4}-\dfrac{18}{a-2}+6=\dfrac{5a-28-36+12a-24}{2a-4}=\dfrac{17a-88}{2a-4} \\ 2y=5-z=5-\dfrac{18}{a-2}=\dfrac{5a-10-18}{a-2}=\dfrac{5a-28}{a-2} \to y=\dfrac{5a-28}{2a-4} \\ z=\dfrac{18}{a-2} \end{array}\right.$$

Para cada valor de $a\neq 2$, tenemos un sistema de ecuaciones diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos es compatible determinado, con *Solución:* $x=\dfrac{17a-88}{2a-4},\quad y=\dfrac{5a-28}{2a-4},\quad z=\dfrac{18}{a-2}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 8 \\ 2 & 2 & m & | & 6 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & 5 & | & 8 \\ 2 & 2 & m & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & | & 0 \end{pmatrix}$

• Si $m = 4$, el sistema sería compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ y=2-z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=3-2z-y=3-2z-2+z=1-z \\ y=2-z \end{array}$$

Las soluciones serían: $x = 1-\lambda, \quad y = 2-\lambda, \quad z = \lambda, \quad$ con $\lambda \in \mathbf{R}$

• Si $m \neq 4$, el sistema sería compatible determinado. Quedaría: $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3-y=3-2=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{array}$

Para cada valor de $m \neq 4$, tenemos un sistema diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única (1, 2, 0).

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -17 & | & 0 \\ 1 & 2 & m & | & 5 \\ 1 & 0 & -5 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & 1 \\ 2 & -1 & -17 & | & 0 \\ 1 & 2 & m & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & 1 \\ 0 & -1 & -7 & | & -2 \\ 0 & 2 & m+5 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & 1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 2 \\ 0 & 0 & m-9 & | & 0 \end{pmatrix}$

• Si $m = 9$, el sistema quedaría: $\left.\begin{array}{r} x-5z=1 \\ y+7z=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=1+5z \\ y=2-7z \end{array}\right\}$

Sería compatible indeterminado, con soluciones: $x = 1 + 5\lambda, \quad y = 2 - 7\lambda, \quad z = \lambda, \quad$ siendo $\lambda \in \mathbf{R}$

• Si $m \neq 9$, el sistema sería compatible determinado. Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r} x-5z=1 \\ y+7z=2 \\ (m-9)z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{array}$

Para cada valor de $m \neq 9$, tendríamos un sistema de ecuaciones diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única (1, 2, 0).

e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & | & 19 \\ 3 & -6 & a & | & -16 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 5 & -6 & | & 19 \\ 3 & -6 & a & | & -16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & 18 \\ 0 & -6 & a+3 & | & -19 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 5\cdot 3^a + 6\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & 18 \\ 0 & 0 & 5a-15 & | & 13 \end{pmatrix}$

• Si $5a-15=0$, es decir, si $a=3$, la 3^a ecuación quedará $0z=13$, que es imposible. Por tanto, sería incompatible.

• Si $a \neq 3$, el sistema sería compatible determinado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-z=1 \\ 5y-5z=18 \\ (5a-15)z=13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1+z=1+\dfrac{13}{5a-15}=\dfrac{5a-15+13}{5a-15}=\dfrac{5a-2}{5a-15} \\ 5y=18+5z=18+5\cdot\dfrac{13}{5(a-3)}=18+\dfrac{13}{a-3}=\dfrac{18a-54+13}{a-3}=\dfrac{18a-41}{a-3} \rightarrow y=\dfrac{18a-41}{5a-15} \\ z=\dfrac{13}{5a-15} \end{array}$$

Para cada valor de $a \neq 3$, tenemos un sistema diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única: $x=\dfrac{5a-2}{5a-15}, \quad y=\dfrac{18a-41}{5a-15}, \quad z=\dfrac{13}{5a-15}$