TEMA 4 – RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Resolución de sistemas: Regla de Cramer y Teorema de Rouché-Frobenius

EJERCICIO 1 : Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=-5\\ x+y=1\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}-x+2y-z=0\\ x-3y+z=-3\\ 2x+y-z=1\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}2x-y=0\\ 3x+y=5\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r}x+y-z=2\\ -x+2y+z=4\\ 3x+y+z=6\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r}-x+4y=-6\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}x-2y+z=-3\\ 2x+3y-z=3\\ x-y+3z=6\end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r}-3x+2y=3\\ 2x-y=-1\end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r}2x-y-z=0\\ -x+2y+z=1\\ x-3y-2z=-3\end{array}\right\}$ **i)** $\left.\begin{array}{r}3x+2y=-5\\ 5x+y=1\end{array}\right\}$ **j)** $\left.\begin{array}{r}x+2y-z=1\\ -3x+y+z=-5\\ x-y+3z=5\end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r}-x+3y=-5\\ x+y=1\end{array}\right\}\left(\begin{array}{cc|c}-1&3&-5\\1&1&1\end{array}\right);\quad A=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\end{pmatrix};\quad |A|=-4\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe una solución

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-5&3\\1&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-8}{-4}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1&-5\\1&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{4}{-4}=-1$$

La solución del sistema es: (x,y) = (2,-1)

b) $\left.\begin{array}{r}-x+2y-z=0\\ x-3y+z=-3\\ 2x+y-z=1\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&0\\1&-3&1&-3\\2&1&-1&1\end{array}\right);\quad |A|=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\1&-3&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&2&-1\\-3&-3&1\\1&1&-1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1&0&-1\\1&-3&1\\2&1&-1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-9}{-3}=3;\ z=\frac{\begin{vmatrix}-1&2&0\\1&-3&-3\\2&1&1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-14}{-3}=\frac{14}{3}$$

La solución del sistema es : $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},3,\frac{14}{3}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r}2x-y=0\\ 3x+y=5\end{array}\right\}\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&0\\3&1&5\end{array}\right);\quad A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix};\quad |A|=5\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe una solución

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&-1\\5&1\end{vmatrix}}{5}=\frac{5}{5}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\3&5\end{vmatrix}}{5}=\frac{10}{5}=2$$

La solución del sistema es: (x,y) = (1,2)

d) $\left.\begin{array}{r}x+y-z=2\\ -x+2y+z=4\\ 3x+y+z=6\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\-1&2&1&4\\3&1&1&6\end{array}\right);\quad |A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&2&1\\3&1&1\end{vmatrix}=12\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&2&1\\6&1&1\end{vmatrix}}{12}=\frac{12}{12}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&4&1\\3&6&1\end{vmatrix}}{12}=\frac{24}{12}=2;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&2&4\\3&1&6\end{vmatrix}}{12}=\frac{12}{12}=1$$

La solución del sistema es: (x,y,z) = (1,2,1)

e) $\left.\begin{array}{r}-x+4y=-6\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}\left(\begin{array}{cc|c}-1&4&-6\\2&-3&7\end{array}\right);\quad A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix};\quad |A|=-5\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe una sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-6&4\\7&-3\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-10}{-5}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1&-6\\2&7\end{vmatrix}}{-5}=\frac{5}{-5}=-1$$ $\Rightarrow$ La solución del sistema es: (x,y) = (2,1)

f) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$; $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=17\neq 0 \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17}=\frac{-15}{17};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17}=\frac{45}{17};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17}=\frac{54}{17}$$

La solución del sistema es: $(x,y,z)=\left(\frac{-15}{17},\frac{45}{17},\frac{54}{17}\right)$

g) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$; $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $|A|=-1\neq 0$ $\Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-3}{-1}=3$$

La solución del sistema es: (x,y) = (1,3)

h) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right)$; $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{0}{-2}=0;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

La solución del sistema es: (x,y,z) = (1,0,2)

i) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $|A|=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $|A|=-7\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe una solución

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{-7}{-7}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{28}{-7}=-4$$

La solución del sistema es: (x,y) = (1,-4)

j) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$; $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0 \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado $\Rightarrow$ Existe 1 sol.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22}=\frac{44}{22}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22}=\frac{0}{22}=0;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22}=\frac{22}{22}=1$$

La solución del sistema es: (x,y,z) = (2,0,1)

<u>EJERCICIO 2</u> : Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del los siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x-4y+z=1 \\ -x+2y-z=3 \\ x\quad -z=7 \\ x-y\quad =2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \text{RangoA}=2 \\ \text{RangoA*}=2 \\ \text{Nº Incog}=3 \end{array}\right]\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$$

Discusión y resolución de sistemas con parámetros

<u>EJERCICIO 3</u> : Discute los siguientes sistemas, según los valores del parámetro:

a) $\begin{cases} \mathbf{x - y + 2z = 1} \\ \mathbf{2x + y + az = 0} \\ \mathbf{x + y - z = a} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{mx + y = 2 - 2m} \\ \mathbf{x + my = m - 1} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 2z = 1} \\ \mathbf{x + (a+1)y + 2az = -7} \end{cases}$

Solución:

a) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2a - 1$

$|A| = 0 \rightarrow -2a - 1 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1}{2}$

- Si $a = \dfrac{-1}{2} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\underline{o}}$ incógnitas $= 3 \Rightarrow$ El sistema es *compatible determinado.*
- Si $a = \dfrac{-1}{2}$, queda: $A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ ran (A) = ran (A') = nº incógnitas = 2. El sistema es compatible determinado.
- Si $m = -1$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 1 \\ \text{rangoA*} = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ El sistema es *incompatible*.
- Si $m = 1$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 1 \\ \text{RangoA*} = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & (a+1) & 2a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a - 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a = 1$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = $n^{\underline{o}}$ incógnitas = 3. El sistema es *compatible determinado.*
- Si $a = 1 \Rightarrow$ Queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ El sistema es *incompatible.*

<u>EJERCICIO 4</u> : Discute, y resuelve cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y = 1} \\ \mathbf{-6x + 4y = -2} \\ \mathbf{x + ky = 2} \end{cases}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{-x + \lambda y + 2z = -1} \\ \mathbf{2x + \lambda y - z = 2} \\ \mathbf{\lambda x - y + 2z = -1} \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - y + az = 1} \\ \boldsymbol{x + ay + z = 1} \\ \boldsymbol{x \quad\quad - z = 1} \end{array}\right\}$

Solución:

a)

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3k-2 & -5 \end{array}\right)$ -3k-2 = 0 $\Rightarrow k = \dfrac{-2}{3}$

- Si $k = \dfrac{-2}{3} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\underline{o}}$ incógnitas $= 2$. El sistema es compatible *determinado.*

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & k\end{vmatrix}}{3k+2}=\dfrac{k+4}{3k+2}$; $y=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{3k+2}=\dfrac{5}{3k+2}$ Solución : $(x,y)=\left(\dfrac{k+4}{3k+2};\dfrac{5}{3k+2}\right)$

- Si $K=\dfrac{-2}{3}$, queda: $A'=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 1\\ 1 & -2/3 & 2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 6\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{array}\right)\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{RangoA}=1\\ \text{RangoA*}=2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix}-1 & \lambda & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ \lambda & -1 & 2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|A|=-3\lambda^2-6\lambda-3=-3(\lambda^2+2\lambda+1)=-3(\lambda+1)^2$

$|A|=0 \rightarrow \lambda=-1$

- Si $\lambda\neq-1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado $\left.\begin{array}{r}-x+\lambda y+2z=-1\\ 2x+\lambda y-z=2\\ \lambda x-y+2z=-1\end{array}\right\}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & \lambda & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2}=\frac{1}{\lambda+1};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ \lambda & -1 & 2\end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2}=\frac{1}{\lambda+1};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & \lambda & -1\\ 2 & \lambda & 2\\ \lambda & -1 & -1\end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2}=\frac{-\lambda}{\lambda+1}$$

- Si $\lambda=-1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{RangoA}=2\\ \text{RangoA*}=2\\ \text{Nº Incog}=3\end{bmatrix}\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

$\begin{cases}-x-y+2z=-1\\ -y+z=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ Un grado de libertad : $z=\alpha$, $y=\alpha$, $x=1+\alpha \Rightarrow (x,y,z)=(1+\alpha,\alpha,\alpha)\ \forall\ \alpha\in R$

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|A|=-a^2-a-2\neq0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de *a*, tenemos un sistema diferente, todos ellos tienen solución única. Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$ $\rightarrow$ $|A|=-a^2-a-2$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=0;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=0$$

Cada uno de los sistemas que obtenemos, para cada valor distinto de *a*, tiene como solución única (x,y,z) = (1, 0, 0).

<u>EJERCICIO 5</u> : Estudia, según los valores del parámetro *a*, el siguiente sistema homogéneo. Resuélvelo en los casos en los que sea posible: $\begin{cases}\mathbf{4x-4z=0}\\ \mathbf{x-y+az=0}\\ \mathbf{x+ay+z=0}\end{cases}$

Solución:

<u>Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:</u> (Hemos simplificado la 1ª ecuación, dividiéndola entre 4). $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|A|=-a^2-a-2=-(a^2+a+2)$

$|A|=0 \rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución $\rightarrow |A|\neq0$ para cualquier valor de a

Por tanto, como el sistema es homogéneo, tiene como solución única $x=0$, $y=0$, $z=0$, cualquiera que sea el valor de *a*.

<u>EJERCICIO 6</u> : Discute el siguiente sistema, según los valores del parámetro *a*. Resolverlo cuando sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + ay + 4z = 2} \\ \mathbf{ax + 2y + 6z = 0} \\ \mathbf{4x + 2ay + 10z = a} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \pm 2$

• Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \quad \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

• Si $a = 2$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones

$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Un grado de libertad: z = -1, y = α, x = 3 - α ⇒ (x,y,z) = (3-α,α,-1) ∀ α ∈ R

• Si $a = -2$, quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{rangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

<u>EJERCICIO 7</u> : Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores del parámetro *a*. Resolverlo en el caso *a* = 3:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x + y + az = 1} \\ \mathbf{ax + y + az = 3} \\ \mathbf{x + ay + (a+2)z = 1} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a+2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = a^3 - 2a^2 - a + 2 = (a-1)(a+1)(a-2)$

$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1, \ a = -1, \ a = 2$

• Si $a \neq 1$, $a \neq -1$ y $a \neq 2 \quad \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

• Si $a = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

• Si $a = -1$, quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

• Si $a = 2$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sist. Incompatible

• Si $a = 3$, queda: $\left.\begin{aligned} x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{aligned}$

<u>EJERCICIO 8</u> : Estudia el siguiente sistema homogéneo, según los valores del parámetro *m*; y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x + 3y + 2z = 0} \\ \mathbf{x + my + 2z = 0} \\ \mathbf{2x + (3+m)y + 4z = 0} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 3+m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ No podemos aplicar Cramer

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 2 & 4 & 3+m & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3$

- Si $m = 3$, queda: $x+3y+2z=0 \quad \rightarrow \quad x=-3y-2z$

El sistema es compatible indeterminado, con soluciones: $x = -3\lambda - 2\mu$; $y = \lambda$; $z = \mu$, con $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$

- Si $m \neq 3 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.y = 0, z = α, x = - 2α ⇒ (x,y,z) = (-2α, 0,α) $\forall\, \alpha \in R$

<u>EJERCICIO 9</u> : Estudia, en función de *a* y *b*, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:
$$\left.\begin{array}{r} x+ay-z=2 \\ ax-2y+2z=-1 \\ 2x-y+z=b \end{array}\right\}$$

*Solución:*Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2+5a-4=0 \begin{cases} a=1 \\ a=4 \end{cases}$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 4 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de *b*.
- Si $a=1$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & b-4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \rightarrow b=1$

\- Si $a = 1$ y $b \neq 1 \rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (A') = 3. El sistema sería incompatible.

\- Si $a = 1$ y $b = 1 \rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas.* El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow$ Un grado de libertad : z = α, y = α+1, x = 1 ⇒ (x,y,z) = (1,1+α,α) $\forall\, \alpha \in R$

- Si $a = 4$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & 3 & b-4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1 \end{array}\right) \rightarrow -2b-1=0 \rightarrow b=\frac{-1}{2}$

\- Si $a=4$ y $b \neq \frac{-1}{2} \rightarrow$ $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

\- Si $a=4$ y $b = \frac{-1}{2} \rightarrow$ $ran(A) = ran(A') = 2 < n^{o}$ *incógnitas*

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos: $\begin{cases} x+4y-z=2 \\ -6y+2z=-3 \end{cases} \Rightarrow$ Un grado de libertad: z = α, y = $\frac{3+2\alpha}{6}$, x = $-\frac{\alpha}{3} \Rightarrow$

$(x,y,z) = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{3+2\alpha}{6}, \alpha\right) \qquad \forall\, \alpha \in R$

<u>EJERCICIO 10</u> : Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:
$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=\mu \\ 2x-y+z=2 \\ x+\lambda y+2z=3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$

- Si $\lambda \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $\lambda \neq 0$ y cada valor de μ, tenemos un sistema diferente, cada uno de ellos con solución única. Lo resolvemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\mu & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda & 2\end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{2+2\lambda-2\mu-\lambda\mu}{3\lambda}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & \mu & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{3-3\mu}{3\lambda}=\frac{1-\mu}{\lambda}\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & \mu\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & \lambda & 3\end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{-1+2\lambda+\mu+2\lambda\mu}{3\lambda}$$

- Si $\lambda = 0$, queda: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & \mu\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & \mu\\ 0 & 1 & 3 & 2+2\mu\\ 0 & 1 & 3 & 3+\mu\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & \mu\\ 0 & 1 & 3 & 2+2\mu\\ 0 & 0 & 0 & 1-\mu\end{array}\right)\ \rightarrow\ 1-\mu=0\rightarrow\mu=1$

Si $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es compatible determinado.
Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 1$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema es incompatible.

EJERCICIO 11 : Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado: $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{2x+y=3}\\ \boldsymbol{x=a}\\ \boldsymbol{5x+y=3+b+2a}\\ \boldsymbol{x=b}\end{array}\right\}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & a\\ 5 & 1 & 3+b+2a\\ 1 & 0 & b\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2a-3\\ 0 & -3 & 2b+4a-9\\ 0 & -1 & 2b-3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2a-3\\ 0 & 0 & 2b-2a\\ 0 & 0 & 2b-2a\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2a-3\\ 0 & 0 & 2b-2a\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow 2b-2a=0\Rightarrow b=a$$

Si a = b ⇒ Rango A = Rango A^* = Nº Incógnitas = 2 ⇒ Sistema compatible determinado ⇒ Existe una solución

$$\begin{cases}2x+y=3\\ -y=2a-3\end{cases}\Rightarrow y=3-2a,\ x=a\Rightarrow(x,y)=(a,3-2a)$$

Si a ≠ b ⇒ Rango A = 2 ≠ Rango A^* = 3 ⇒ Sistema Incompatible ⇒ No tiene solución

EJERCICIO 12 : Estudia el siguiente sistema, en función de *a* y *b*. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x-y+az=1}\\ \mathbf{2x+y+az=3}\\ \mathbf{x+2y-az=b}\end{array}\right\}$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -a\end{pmatrix}\ \rightarrow\ |A|=-3a=0\ \rightarrow\ a=0$

- Si $a \neq 0$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de *b*.
- Si *a* = 0, queda: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & b\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & b-1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{array}\right)\Rightarrow b-2=0\Rightarrow b=2$

- Si *a* = 0 y *b* ≠ 2 $\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema es incompatible.
- Si *a* = 0 y *b* = 2 $\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases}x-y=1\\ 3y=1\end{cases}\Rightarrow y=\frac{1}{3},\ x=\frac{4}{3},\ z=\alpha\Rightarrow(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\alpha\right)\quad\forall\alpha\in R$$

EJERCICIO 13 : Discute, en función de λ y μ, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado: $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+y+\lambda z=2}\\ \mathbf{-x+2y-\lambda z=-2}\\ \mathbf{x+4y+z=\mu}\end{array}\right\}$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda\\ -1 & 2 & -\lambda\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ |A|=3-3\lambda=0\ \rightarrow\ \lambda=1$

• Si $\lambda \neq 1 \;\rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ.
Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ -2 & 2 & -\lambda \\ \mu & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{6-3\lambda\mu}{3-3\lambda} = \frac{2-\lambda\mu}{1-\lambda}\;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \mu & 1 \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = 0\;;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{3\mu-6}{3-3\lambda} = \frac{\mu-2}{1-\lambda}$$

La solucion es $\left(\dfrac{2-\lambda\mu}{1-\lambda},\ 0,\ \dfrac{\mu-2}{1-\lambda}\right)$.

• Si $\lambda = 1$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \mu-2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-2 \end{array}\right) \Rightarrow \mu-2=0 \;\rightarrow\; \mu = 2$

- Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema es incompatible.
- Si $\lambda = 1$ y $\mu = 2 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *2.< nº incógnitas* El sistema es compatible indeterminado.

<u>EJERCICIO 14</u> : Estudia los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros que contienen:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = b \\ -2x + y - z = -3 \\ 4x - ay + z = b \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x - 2y + \lambda z = 5 \\ -x + y - \lambda z = -4 \\ x - 4y + z = \mu \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x - 2y + az = b \\ 3x + y + az = 5 \\ x + 5y - az = 5 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} x + y - z = \mu \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + \lambda y - z = 3\mu \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} x - ay + z = b \\ 2x + ay - z = 2 \\ -x + ay + 2z = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -a & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = -a+1 = 0 \;\rightarrow\; a = 1$

• Si $a \neq 1 \;\rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de *b*.

• Si $a = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & -9+2b \\ 0 & 1 & -1 & b-6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & -9+2b \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right) \rightarrow b-3=0 \;\rightarrow\; b=3$

• Si $a = 1$ y $b = 3 \;\rightarrow\; \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2.$ El sistema sería compatible determinado.

• Si $a = 1$ y $b \neq 3 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema sería incompatible.

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = \lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$

• Si $\lambda \neq 1 \;\rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ.

• Si $\lambda = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & \mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \mu-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-7 \end{array}\right) \rightarrow \mu-7=0 \rightarrow \mu = 7$

• Si $\lambda = 1$ y $\mu = 7 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2 > *nº incógnitas*, el sistema sería compatible determinado.
• Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 7 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema sería incompatible.

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = a\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{para cualquier valor de } a.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 3 & 1 & a & 5 \\ 1 & -2 & a & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 0 & -14 & 4a & -10 \\ 0 & -7 & 2a & b-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 0 & -14 & 4a & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{array}\right) \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

• Si $b = 0 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2. El sistema sería compatible indeterminado, cualquiera que fuese el valor de *a*.
• Si $b \neq 0 \;\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 ≠ *ran* (*A'*) = 3. El sistema sería incompatible.

d) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = 0 \quad \text{para cualquier valor de } \lambda$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \mu \\ 1 & -1 & \lambda & 3\mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \mu \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 3\mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\mu-7\mu \end{array}\right) \Rightarrow \lambda\mu-7\mu=0 \Rightarrow \mu(\lambda-7)=0$$

- Si $\mu = 0$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2. El sistema sería compatible determinado, cualquiera que fuese el valor de λ
- Si $\lambda = 7$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2. El sistema sería compatible determinado, cualquiera que fuese el valor de μ
- Si $\mu \neq 0$ y $\lambda \neq 7$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 $\neq$ *ran* (*A'*) = 3. El sistema sería incompatible.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -a & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 3 & 3a & 6 \\ 0 & 3 & 2a & b+2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 3 & 3a & 6 \\ 0 & 0 & -a & b-4 \end{array}\right) \Rightarrow -a=0 \Rightarrow a=0$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a = 0 \rightarrow a = 0$

- Si $a \neq 0$ $\rightarrow$ Rango A=Rango A* = Nº Incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de *b*.
- Si $a=0$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2. \neq$ Nº Incógnitas El sistema sería compatible indeterminado.
- Si $a = 0$ y $b \neq 4$ $\rightarrow$ *ran* (*A*) = 2 $\neq$ *ran* (*A'*) = 3. El sistema sería incompatible.

Existencia y cálculo de la inversa de una matriz

<u>EJERCICIO 15</u>

a) Calcula el valor de *x* para que la matriz *A* tenga inversa: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b) Halla A^{-1} para $x = 2$.**

Solución:

a) Para que exista A^{-1} es necesario y suficiente que $|A| \neq 0$. Calculamos $|A|$:

$|A| = 1 \neq 0$ para todo x. Por tanto, existe A^{-1} cualquiera que sea el valor de x.

b) Para $x = 2$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

Hallamos A^{-1} en este caso: $\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\frac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

<u>EJERCICIO 16</u> : Calcula, si es posible, la inversa de la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1+a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1+a} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ **Para los casos en los que *a* = 2 y *a* = 0.**

Solución:

<u>Para *a = 2*</u>, queda: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, $|A| = -2$. En este caso, sí existe A^{-1}. La calculamos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Para $a = 0$</u>, queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$. Por tanto, en este caso, no existe A^{-1}.

<u>EJERCICIO 17</u>

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de *A*: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 4\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda+1)^2$

$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad 3(\lambda+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$ Por tanto, existe A^{-1} para $\lambda \neq -1$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 18</u>

a) Encuentra los valores de *a* para los que la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es inversible. b) Calcula A^{-1} para $a = 2$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de *A*: $|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - (a-2) + a \cdot (a-2) - 2a - 2 = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$ Por tanto, la matriz no es inversible para $a = 1$ y para $a = \frac{2}{3}$.

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 4$. La matriz A queda:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 19</u> :

a) Encuentra los valores de *m* para que los la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ no sea inversible.

b) Calcula A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$. Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \to \quad m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto, A no es inversible para $m = 1$ ni para $m = 2$.

b) Para $m = 0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad |A| = -2$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \to\to \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 20</u> : Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a y calcula A^{-1}

Solución:

Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a

Por tanto, como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} para todo a.

Hallamos A^{-1}: $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1-a^2 & a \end{pmatrix} \quad \to \quad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad \to\to \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 21</u>

a) Estudia para qué valores de λ existe la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 6 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Por tanto, existe A^{-1} si $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 2$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad |A| = 6$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to\to \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 22</u>

a) Halla los valores de *a* para que los que existe la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $a = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2 (a+2) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Por tanto, existe A^{-1} para $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

b) Para $a = 0$; queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones

<u>EJERCICIO 23</u> : Expresa los siguientes sistemas en forma matricial y resuélvelos utilizando la matriz inversa:

a) $\left.\begin{aligned} -3x + y - z &= -5 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x \quad + z &= 3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 8 \\ x - 2y + z &= 7 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 7 \\ x + y - 2z &= 5 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -4 \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 6 \\ x \quad + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ -x + y - z &= 1 \\ 2x + y &= -4 \end{aligned}\right\}$ g) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y \quad &= 1 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ h) $\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -3 \\ 3x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$ i) $\left.\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 10 \\ x + 2y + z &= 5 \\ -x \quad + 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Calcula la inversa de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Despejamos X: $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

b) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}: $|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Calculamos la inversa de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Despejamos X: $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

c) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = 3 \neq 0$ y hallamos A^{-1}: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Obtenemos *X*: $X = A^{-1}C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Por tanto la solución del sistema es: $x = 1;\ y = 2;\ z = -1$

d) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Existe A^{-1}

Calculamos la inversa de *A*: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Despejamos *X:* $AX = C \quad \rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}C \quad X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = -2,\ y = 0,\ z = 1$

e) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Existe A^{-1}

Calculamos la inversa de : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Despejamos *X:* $AX = C \quad \rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}C \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}C \Rightarrow X = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1,\ y = 1,\ x = 0$

f) Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Para resolverlo, despejamos *X* multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = -1 \neq 0$ y hallamos A^{-1}: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&4&1\\3&5&1\end{pmatrix}$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&4&1\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ Por tanto, la solución del sistema es: $x=-2$, $y=0$, $z=1$

g) Expresamos el sistema en forma matricial: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AX=C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $AX=C \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C \rightarrow X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=-1\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-6&1\\-1&1&0\\-2&3&-1\end{pmatrix} \rightarrow (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-6&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-4&1&2\\6&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-4&1&2\\6&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ Por tanto, la solución del sistema es: $x=1$, $y=-1$, $z=1$

h) Expresamos el sistema en forma matricial:

$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AX=C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $AX=C \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C \rightarrow X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=2\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&2&3\\3&-4&-5\end{pmatrix} \rightarrow (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto la solución del sistema es: $x=0$, $y=-1$, $z=1$

i) Expresamos el sistema en forma matricial.

$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AX=C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $A^{-1}AX=A^{-1}C \rightarrow X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=5\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-2&4&-1\\5&-5&5\end{pmatrix} \rightarrow (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x=3$, $y=1$, $z=0$

Resolución de ecuaciones con matrices

EJERCICIO 24

a) Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $A \cdot X = B$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

Solución:

a) $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} (existe, pues $|A| = 1 \neq 0$):

$$\alpha_{ij} \rightarrow \text{Adj}(A) \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t \rightarrow \frac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = X$

b) Sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y que, por tanto, en general, $M \cdot N \neq N \cdot M$. Pero veamos si en este caso se cumple la igualdad. $X \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq B$. Por tanto, X *no* verifica la igualdad $X \cdot A = B$.

EJERCICIO 25 : Halla una matriz, X, tal que $AX + B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Despejamos X en la ecuación dada: $AX + B = 0 \rightarrow AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$

Hallamos la matriz inversa de A:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X: $X = -A^{-1}B = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 26 : Halla X tal que $AX = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Despejamos X de la ecuación dada: $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Hallamos la matriz inversa de

A: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Obtenemos la matriz X: $X = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 27</u> : Halla una matriz, *X*, tal que *AX* = *B*, siendo: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos X en la ecuación, multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $AX=B \quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}B \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}B$

Comprobamos que $|A|=-2\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&2&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\quad\rightarrow\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto: } X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&2\\0&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 28</u> : Resuelve matricialmente el siguiente sistema: $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$ Así, tenemos que $A\cdot X=B$. Hemos de calcular $X=A^{-1}\cdot B$.

Hallamos A^{-1} (existe, pues $|A|=1\neq 0$):

$$\alpha_{ij}\quad\rightarrow\quad\mathrm{Adj}(A)\quad\rightarrow\quad[\mathrm{Adj}(A)]^t\quad\rightarrow\quad\frac{1}{|A|}[\mathrm{Adj}(A)]^t$$

$$\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-3&2\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}=A^{-1}$$

$$\text{Por tanto: } X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Solución: $x=2$; $y=-3$; $z=2$.