

UNIDAD 1 MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Efectuar las siguientes operaciones con matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$b) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right]^2$$

2.- Hallar el valor de x e y para que se verifique: $A^2 - xA - yI = 0$. Siendo x e y números reales, I la matriz identidad de orden 2, y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{3 \times 4}$, y tales que $a_{ij} = i - j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j} + 2^{j+1}$.

Hallar $A + B$.

4.- Hallar una matriz X que verifique $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R y S por unidad de peso:

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ Q \\ R \\ S \end{array}$$

- a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos y de manera que contenga 20 u. de vitamina A, 25 u. de vitamina B y 6 u. de C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?
- b) Si la cantidad de producto Q es de 2 u., ¿cuáles serán las cantidades de los otros productos en esa dieta?
- c) Obtén, en función de la cantidad de producto Q, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores debe estar la cantidad de producto Q?

6.- Calcular el valor de los determinantes siguientes:

$$a) \begin{vmatrix} 29 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

7.- Demostrar que si todas las filas de un determinante de orden 3 son múltiplos de k, el determinante es múltiplo de k y de k³.

8.- Calcular el valor de los determinantes (usando las propiedades)

$$\begin{vmatrix} x & 1/x & yz \\ y & 1/y & xz \\ z & 1/z & xy \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x+y & z & z \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix}$$

9.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, hallar el valor de los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

10.- Hallar los valores de x para los que A posee inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

11.- Demostrar la igualdad siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

12.- Demostrar, sin calcular su valor, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

13.- Demostrar: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

14.- Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$

15.- Hallar el valor de x para que el rango de la siguiente matriz sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

16.- Hallar el valor de k para que la siguiente matriz sea de rango 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

17.- a) Calcular el rango de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix} \text{ en función de los valores de } m.$$

b) Para $m=0$, estudiar si existe una matriz X de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & d & c \\ c & a & b \\ d & b & d \end{pmatrix} \text{ tal que } A \cdot X = I \text{ (Con } I \text{ la identidad de orden 3)}$$

18.- Estudiar el rango de :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la inversa de $2A - B \cdot C$

b) Resuelve la ecuación $2A \cdot X = B \cdot C \cdot X + A^2$

20.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina paso a paso A^{-1} .

b) Resuelve la ecuación $A \cdot X - B = A \cdot B$

21.- Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

22.- a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X + A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden 2, e I_2 la matriz identidad de orden 2.

b) Resuelve la ecuación $B \cdot X + B^2 = I_2$ si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e I_2 la matriz identidad de orden 2.

23.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$,

y además $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x + 6$, calcula el valor de x .

24.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Encuentra la expresión general de la potencia n -ésima de A . En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.
- Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

25.- Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$

b) Encuentra, razonadamente, una fórmula general para B^n .

26.- Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que

$$\text{rg}(A \cdot A^t) = \text{rg}(A^t \cdot A) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

27.- Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calcula razonadamente: $|A^{101}|$ y $|A^{1000}|$

SOLUCIONES

1.- a) $\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{2} & \frac{2}{33} \end{pmatrix}$ 2.- $x = 3$, $y = -8$

3.- $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 28 \\ 4 & 9 & 14 & 31 \\ 7 & 8 & 17 & 30 \end{pmatrix}$ 4.- $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.- a) Sí, infinitas. b) 10 u de P, 2 u de Q, 3 u de R y 2 u de S.

c) P: $8 + x$; Q: x ; R: 3 ; S: $6 - 2x$ $0 < x < 3$.

6.- a) 148 b) -28 c) 0 8.- 1) 0 2) ab 3) 0 4) $4xyz$

9.- a) $\frac{5}{2}$ b) 5 c) 10 23.- $(a^2 - b^2)^4$

10.- $x \neq 0$, -3 14.- $x = 1$

15.- $x = 3$ 16.- $k = -1$

17.- a) $m = 1$, $\text{rg}(A) = 1$; $m = -1$, $\text{rg}(A) = 2$; $m \neq \pm 1$, $\text{rg}(A) = 3$ b) No existe

18.- Siempre $\text{rg}(A) = 3$ porque $|A| = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

19.- a) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

20.- a) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

21.- $x = 0$, $x = -1$

22.- a) $X = A^{-1} \cdot (I_2 - A^2)$ b) $X = -I_2$ 23.- $60x - 7x = 50x + 6 \Rightarrow x = x = 2$

24.- $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25.- a) $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

27.- $|A^{101}| = -1$; $|A^{1000}| = 1$