1. Resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$, sabiendo que X e Y son matrices cuadradas de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Siendo I la matriz identidad 3x3 y O la matriz nula 3x3, prueba que $A^3+I = O$.
b) Calcula A^{10}.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, encuentra una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que AX = O (O matriz nulas).

4. Calcula A^n, siendo:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

5. Calcula A^{125}, siendo:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -4 \\ 20 & -16 & -8 \\ -15 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

6. Calcula $A^{250} + A^{20}$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. a) Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2+I = O$ I matriz identidad y O matriz nula, 2x2).

b) Obtén una matriz B, distinta de ±A, que verifique la relación $B^2+I = 0$.

8. Obtén los valores de x, y, z que verifiquen la ecuación matricial: $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halla los valores de a y b para que se verifique: $A^2+aA+bI = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

10. Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando cuando existe una matriz P invertible tal que: AP = PB.

a) Prueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

b) Resuelve los sistemas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

11. Da un ejemplo de una matriz

de orden	2	2	2	3	3	3
con rango	2	1	0	2	1	0

12. Calcula el valor del determinante:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 & \ln 9 \\ 1 & \ln 8 & \ln 27 \end{vmatrix}$

13. Siendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$, halla $\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$.

14. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 5$, calcula, razonadamente, el valor de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2x & 3y & 4z \\ 2u & 3v & 4w \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ u & w & v \end{vmatrix}$

15. Resuelve sin desarrollar, aplicando y justificando las propiedades de los determinantes: $D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

16. Sin desarrollar el determinante, demuestra: $\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$.

Enuncia las propiedades de los determinantes utilizadas.

17. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que se aplican.

18. Resuelve la ecuación:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ **3.** $\begin{vmatrix} -2x^2 & 0 & 4x+12 \\ 2x^2+6 & -6 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

19. Obtén, en función de a, b y c, el valor del determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$.

20. Halla el rango de la matriz:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 5 & -5 & -2 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

21. Calcula, según los valores de m, el rango de la matriz:

1. $\begin{pmatrix} 1 & m+3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m-5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2m+4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & m-5 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -m+3 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2m+2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} -1 & 5-m \\ -1 & 1 \\ 1 & m-5 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -1 & -m+1 \\ 1 & 2m-3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2m-7 & -1 \\ -2m-7 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} m-1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m+2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & m-6 & -3 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} -2m & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2m-4 & -4 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} m-3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & m-2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m+7 \\ -1 & m & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & m-3 & -2 \\ m-4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 1 & m+2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -m-1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2m+1 \\ -1 & -m & -2 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2m & m+3 \\ 1 & 2m & -1 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} -4 & -2 & m-4 \\ m-2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} -1 & 2m & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2m+5 \end{pmatrix}$

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $\left(A^tA^{-1}\right)^2A$.

23. Encuentra una matriz X que verifique la ecuación AX+B = C, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

24. a) Sean A y B dos matrices cuadrads del mismo orden que tienen inversa. Razona si su producto AB también tiene inversa.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determina si CD tiene inversa y, en ese caso, hállala.

25. Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la matriz inversa de C para m = 2.

26. Obtén razonadamente una matriz A que verifique la igualdad: $3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$.

27. Resuelve la ecuación matricial $A^tX = B+C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

28. Halla la matriz X que satisface la ecuación AXB+C = D, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

29. Dado $x \in \Re$, considera la matriz $\begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot A^t$, donde A^t denota la traspuesta de A.

b) Prueba que A tiene inversa y hállala.

30. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

31. Resuelve la ecuación matricial AX+2B = C, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Determina la matriz X que verifica la ecuación AX = X-B, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

33. Sabiendo que la matriz A verifica la relación $A+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

34. Halla los valores de a que hacen que la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. Razona la respuesta.

35. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:
a) Calcula el rango de A:
b) Halla la matriz A^{12}.

36. Halla los valores de m para los que es 2 la característica de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix}$.

37. Halla los valores de k para los cuales la matriz $M = \begin{pmatrix} -k & 1 & 2 \\ -k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \end{pmatrix}$
a) No tiene inversa.
b) Tiene de rango 2.

38. Determina a, b y c, sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2.

39. De las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas inversas.

40. Determina una matriz cuadrada de orden 2 tal que $A+A^t = 2I$ y $|A| = 2$ (I, matriz identidad).

41. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si su inversa A^{-1} y su rtaspuesta A^t coinciden. Dado un número real x, sea B la matriz $B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \mathrm{sen}(x) & 0 \\ -\mathrm{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
a) ¿Es ortogonal la matriz B?
b) ¿Es B^2 ortogonal?

42. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y-z & x-z & y-z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ para los distintos valores de x, y, z.

43. ¿Se puede construir una matriz cuadrada y de orden 3 que verifique las condiciones i) ii) escritas a continuación?
i) Su traspuesta y su inversa coinciden.
ii) Su determinante vale 5.
Razona la respuesta.

44. Sea A una matriz no nula dada y considera la ecuación matricial AX = A+X, donde X es la incógnita.
a) Encuentra razonadamente la relación que debe existir entre las dimensiones de A y X para que la ecuación tenga sentido.
b) ¿Puede ser la suma de dos soluciones una nueva solución? ¿Y el producto de un número por una solución? Justifica la respuesta.
c) Si $A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y buscamos una solución de la forma $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, discute la ecuación matricial que resulta y resuélvela cuando sea posible.

45. a) Determina una matriz X que verifique la relación $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Calcula el determinante de la matriz X hallada.

46. Resuelve el sistema:

1. $\left.\begin{aligned} 3x+2y-z &= 1 \\ x-y+5z &= -2 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 2x-3y+2z &= 3 \\ x-2y+z &= 1 \\ 2x+y-3z &= 2 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} 5x-3y-2z &= -2 \\ x+y &= 2 \\ 2x-y+z &= 3 \end{aligned}\right\}$

47. Comprueba que de los siguientes sistemas de ecuaciones uno es determinado, otro indeterminado y otro incompatible:

a) $\left.\begin{array}{r}8x+y+4z=9\\5x-2y+4z=6\\x+y=1\end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{r}6x-y+3z=6\\-6x+8y=-10\\2x-y-z=4\end{array}\right\}$; c) $\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\3x-4y=5\\7x-y-3z=8\end{array}\right\}$

48. Sea A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}a_{11}++a_{12}y+a_{13}z=1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=-1\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=2\end{array}\right\}$. Resuelve el sistema, sabiendo que $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

49. Discute y resuelve (para el caso a = 0) el sistema $\left.\begin{array}{r}x+y+z=a+1\\x+y+(a-1)z=a\\x+ay+z=1\end{array}\right\}$

50. Discute y resuelve el sistema, según los valores del parámetro a:

1. $\left.\begin{array}{r}2x-y=a\\ax+3y=4\\3x-y=2\end{array}\right\}$ **2.** $\left.\begin{array}{r}ax+y+z=4\\x-ay+z=1\\x+y+z=a+2\end{array}\right\}$ **3.** $\left.\begin{array}{r}x+2y+3z=1\\x+ay+3z=3\\y-z=0\\3y-z=2\end{array}\right\}$ **4.** $\left.\begin{array}{r}a^2x+3y+2z=0\\ax-y+z=0\\8x+y+4z=0\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r}x+ay+2z=0\\(a-1)x+a^2y+az=0\\2x+a(a+2)y+(a+4)z=0\end{array}\right\}$

51. a) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a: $\left.\begin{array}{r}ax+2y+3z=1\\ay+4z=0\\x-y+z=0\end{array}\right\}$.

b) Resuélvelo para a = -1.

52. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\my+z=0\\x+(1+m)y+mz=1+m\end{array}\right\}$

a) Estudia su comportamiento según los valores de m.
b) Resuélvelo para m = 2.

53. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}x+2y+3z=-1\\2x+5y+4z=-2\\x+3y+m^2z=m\end{array}\right\}$.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.
c) Razona para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

54. a) Determina, según los valores del parámetro α, cuándo tiene solución el sistema $\left.\begin{array}{r}\alpha x+y+z=\alpha^2\\\alpha x+(1-\alpha)y+(\alpha-1)z=\alpha^2\\\alpha x+y+\alpha z=2\alpha^2\end{array}\right\}$.

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

55. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix}1&\alpha&-1\\2&-1&\alpha\\1&10&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de los coeficientes?
b) Discute sus soluciones según los valores de α.

56. De la matriz A dada por $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&3&5\\3&8&\alpha\end{pmatrix}$ se sabe que no tiene inversa.

a) ¿Cuánto vale α? Justifica la respuesta.

b) Resuelve el sistema $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) ¿Existe alguna solución de dicho sistema para y = -1?

57. Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{matrix} ax+by+1=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{matrix}\right\}$ se sabe que x = 1, y = 2 es una solución y que x = 7, y = 3 esotra. ¿Qué puede afirmarse respecto a las soluciones del sistema?, ¿cuántas tiene?, ¿cuáles son?

58. Un grupo de 20 personas se reune para ir de excursión. El número total de hombres y mujeres es igual al triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. ¿Cuántas mujeres, hombres y niños hay?

59. En una mesa de una cafetería se tomaron 4 cafés, 2 refrescos y 3 tes, con un costo de 8€. En otra mesa pagaron la misma cantidad por 2 cafés, 3 refrescos y 4 tes. POr otra parte, por 2 cafés y 4 tes en la barra, donde el precio es un 10% más barato, se pagaron 4'5€. ¿Cuánto cuesta cada bebida?

60. La edad de un padre es igual a la suma de la de sus dos hijos. Cunaod pasen tantos años como tiene el hijo mayor, el padre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?

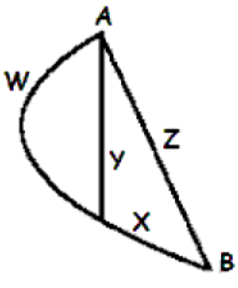
61. Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado:
Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C, me gasto 90€.
Pista 2: Si compro m unidades de A, m+1 de B y 3 de C, me gasto 295€.
a) ¿Hay algún valor de m para el que estas dos pistas no son compatibles?
b) Si en la pista 2 se toma m = 4, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?
c) Pista 3: El amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la pista 2 se tiene m = 4. ¿Cuánto valen A, B y C?

62. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo del pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteinas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteinas y el 15% del de carbohidratos. Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sius excedentes, sus necesidades diarias de proteinas y carbohidratos, ¿cuántos kilos diarios de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

63. Una empresa destino 90000€ a gratificar a sus 51 empleados. Concede 250€ a los empleados de nivel A, 200€ a los de nivel B y 150€ a los de nivel C. Teniendo en cuenta que a los de nivel B destina en total el doble que para los de nivel A, ¿cuántos empleados hay de cada nivel?

64. Una tienda vende una clase de calcetines a 10€ el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 4900€ y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

65. Por la abertura A del mecanismo de tubos de la figura se introducen 50 bolas que se deslizan hasta salir por B. Sabemos que por el tubo W han pasado 10 bolas.
a) Justifica si es posible hallar el número de bolas que pasan exactamente por cada uno de los tubos X, Y y Z.
b) Supongamos que podemos controlar el número de bolas que pasan por el tubo Y. Escribe las expresiones que determinan el número de bolas que pasan por los tubos X y Z en función de las que pasan por Y.
c) Se sabe un dato nuevo: por Y circulan 3 veces más bolas que por Z. ¿Cuántas circulan por X, Y y Z?



Soluciones

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** b) -A **3.** $\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$ **4.1.** $\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot A & n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot I & n \text{ par} \end{cases}$ **4.2.** $3^{n-1}A$ **4.3.** $\begin{cases} A & n \text{ impar} \\ A^2 & n \text{ par} \end{cases}$ **4.4.** A **4.5.** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \operatorname{sen} n\alpha \\ -\operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ **5.1.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 250 & 1 & 0 \\ 375 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.2.**

$\begin{pmatrix} 11 & -3 & 2 \\ 27 & -8 & 4 \\ -20 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ **5.3.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$ **7.** b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **8.** 2, -3, 2 **9.** -1, 12 **10.** b) (x,y) = (k,-k) **12.1.** -10 **12.2.** 105(b-a)(c-a)(c-b) **12.3.** 0 **13.** 1, 1 **14.1.** 120 **14.2.** 5 **14.3.** 5 **15.** abc(b-a)(c-a)(c-b) **18.1.** 7 **18.2.** -3, 2, 5 **18.3.** $\frac{-5}{2}$, 0 **19.** -abc **20.1.** 2 **20.2.** 2 **20.3.** 2 **20.4.** 2 **20.5.** 1 **20.6.** 2 **20.7.** 2 **20.8.** 2 **20.9.** 1 **20.10.** 1 **20.11.** 3 **20.12.** 3 **20.13.** 3 **20.14.** 3 **20.15.** 3 **20.16.** 3 **20.17.** 2 **20.18.** 3 **20.19.** 2 **20.20.** 2 **20.21.** 3 **21.1.** m= -2: 1; m≠ -2: 2 **21.2.** m= 3: 1; m≠ 3: 2 **21.3.** 1, $\forall m\in\Re$ **21.4.** 1, $\forall m\in\Re$ **21.5.** m= 4: 1; m≠ 4: 2 **21.6.** m= 1: 1; m≠ 1: 2 **21.7.** m= -2: 1; m≠ -2: 2 **21.8.** m= 4: 1; m≠ 4: 2 **21.9.** m= 2: 1; m≠ 2: 2 **21.10.** m= -3: 1; m≠ -3: 2 **21.11.** m= 2: 2; m≠ 2: 3 **21.12.** m= -1: 2; m≠ -1: 3 **21.13.** m=3: 2; m≠3: 3 **21.14.** m=4: 2; m≠4: 3 **21.15.** $m\in\left\{\frac{3}{2},2\right\}$: 2; $m\notin\left\{\frac{3}{2},2\right\}$: 3 **21.16.** $m\in\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$: 2; $m\notin\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$: 3 **21.17.** m = 0: 2; m≠0: 3 **21.18.** $m\in\left\{\frac{-5}{2},-2\right\}$: 2; $m\notin\left\{\frac{-5}{2},-2\right\}$: 3 **21.19.** $m\in\left\{1,\frac{7}{2}\right\}$: 2; $m\notin\left\{1,\frac{7}{2}\right\}$: 3 **21.20.** m = 0: 2; m≠0: 3 **21.21.** $m\in\left\{\frac{-3}{2},1\right\}$: 2; $m\notin\left\{\frac{-3}{2},1\right\}$: 3 **21.22.** $m\in\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$: 2; $m\notin\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$: 3 **21.23.** m ∈{2,4}: 2; m∉{2,4}: 3 **21.24.** m= $\frac{3}{2}$: 2; m≠ $\frac{3}{2}$: 3 **22.** $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **24.** a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ **25.** a) -1 b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **29.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$ **30.** a) ±1 b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \frac{-5}{2} & \frac{-17}{2} & 9 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ **32.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **34.** $\Re$ **35.** a) 3 b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ **36.** m≠3 **37.** a) -1, 0 b) -1 **38.** 1, $\frac{23}{29}$, $\frac{33}{29}$ **39.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **41.** a) si b) si **42.** x≠z, x≠y: 3; x≠z, x=y: 2; x=z, x≠y: 2; x=y=z: 1. **43.** no **44.** a) cuadradas de igual orden b) no, no c) k≠2: inc; k=2: $\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$ **45.** a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ b) 27 **46.1.** 12, -21, -7 **46.2.** 2, 1, 1 **46.3.** 1, 1, 2 **47.** a) c.i. b) inc. c) c.d. **48.** -1, 5, 2 **49.** a∉{1,2}: inc; a∉{1,2} c.d. $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ **50.1.** a=1: c.d. (1,1); a=-8: c.d. (10,28); a∉{1,8}: inc **50.2.** a∉{-1,1}: c.d. $\left(\frac{a-2}{1-a},1,\frac{-a^2-a+2}{1-a}\right)$; a=-1: c.i. $\left(\frac{-3}{2},\frac{5}{2},k\right)$; a=1: inc. **50.3.** a≠4: inc; a=4: c.d. (-4,1,1) **50.4.** a∉{-4,2}: c.d. (0,0,0); a=-4: c.i. (-5k,24k,4k); a=2: c.i. (k,0,-2k) **50.5.** a∉{0,1}: c.d. (0,0,0); a=0: c.i. (0,k,0); a=1: c.i. (-k,-k,k) **51.** a) c.d., ∀a b) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ **52.** m=1: inc; m=0: c.i; m∉{0,1}: c.d. b) $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ **53.** a) m=1: inc; m=-1: c.i.; m∉{-1,1}: c.d. b) (-7k-1,2k,k) c) m∉{-1,1} **54.** a) α∉{0,1}: c.d. α=0: c.i.; α=1: inc b) (k,0,0). **55.** a) -5, 3 b) α∉{-5,3}: c.d. α=-5: inc. α=3: c.i. **56.** a) 7 b) α≠9: $\left(\frac{13}{7},\frac{-4}{7},0\right)$; α=9: $\left(\frac{13-13k}{7},\frac{-4-3k}{7},k\right)$ c) (0,-1,1); α=9 **57.** (6k-11,k) **58.** 7, 8, 5 **59.** 0'90, 1, 0'80 **60.** 22, 24, 46 **61.** a) 3 b) no c) 10, 15, 50 **62.** 5, 2 **63.** 6, 15, 30 **64.** 200 **65.** a) no b) 10+y, 40-y c) 40, 30, 10