

1.1.- El número e

Uno de los límites de mayor importancia lo estudió el matemático suizo Leonard Euler.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Si pasamos al límite se tiene la expresión 1^∞ , que nos hace pensar erróneamente que vale 1.

Hay que tener en cuenta que $1 + \frac{1}{x} \neq 1$ para cualquier valor de x

Para analizar esta función vamos a construir una tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,521	2,546	2,565	2,581	2,593

Según la tabla, la función es creciente pero crece lentamente, con lo cual da lugar a pensar que exista

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y sea finito.

x	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
f(x)	2,7048	2,7169	2,7181	2,71826	2,71828047	2,71828169	2,71828179

Su límite es un número irracional que se designa con la letra e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,7182818284590452353602874713527\dots$$

El mismo resultado obtenemos si sustituimos x por cualquier que tienda a infinito:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right)^{x^2 + 1} = e$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^{\sqrt{x+2}} = e$$

1.2.- Límites relacionados con el número e

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se pueden calcular otros límites, aplicando la regla de límite de potencia de funciones.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2$$

Generalizando, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$$

Generalizando, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = e^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = e^3 \cdot 1 = e^3$$

Generalizando, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax+b} = e^a$

Ejercicio 1. Halla los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{6x}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^x$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)^x$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-5}$

SOLUCIÓN

Transformamos la expresión de la función para aplicar el siguiente resultado:

$$\text{“Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \text{”}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5 = e^5$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-6} = e^{-6}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{\frac{5x}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{\frac{5x}{2}}\right]^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{\frac{x^2}{-3} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{\frac{x^2}{-3}}\right]^{\left(-\frac{3}{x^2}\right)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{\frac{x^2}{-3}}\right]^{\left(\frac{3}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x \cdot \frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot \frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{2x-1}{x}} = e^2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot (3x-5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2(3x-5)}{x}} = e^6$$

1.3.- Indeterminaciones de límites $f(x)^{g(x)}$

Si no hay indeterminación, el cálculo de dichos límites se realiza por paso al límite:

Ejemplo 1:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{x} \right)^{x+2} = (2)^{+\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2+1}{6x^2-2} \right)^{-x} = \left(\frac{5}{6} \right)^{-\infty} = +\infty$

Teniendo en cuenta que toda potencia se puede escribir como una potencia de base el número e, $a^b = e^{b \ln a}$, podemos escribir

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Y de esta forma expresar el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$

Casos de indeterminación: 0^0 , $0^{+\infty}$, $0^{-\infty}$, ∞^0

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = (0)^{-\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln x} = e^{-\infty(-\infty)} = +\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln x} = (0)^{+\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \ln \frac{1}{x}} = e^{-\infty(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Ejemplo 4:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} &= (0)^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = (x \sim \sin x) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1 \quad (x \text{ es un infinitésimo de orden superior a } \ln x) \end{aligned}$$

Ejemplo 5:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} &= (\infty)^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -\tan x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cdot \ln x} = (x \sim \tan x) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cdot \ln x} = e^0 = 1 \quad (x \text{ es un infinitésimo de orden superior a } \ln x) \end{aligned}$$

1.4.- Indeterminación 1^∞

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e$$

$$f(x)^{g(x)} = [1 + f(x) - 1]^{g(x)} = \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{g(x)}$$

Hemos expresado la base de la forma $\left(1 + \frac{1}{h(x)} \right)$ y ahora vamos a buscar que aparezca en el exponente de la potencia la función $h(x)$, para ello multiplicamos y dividimos por $h(x)$.

$$\left(1 + \frac{1}{f(x) - 1} \right)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{f(x) - 1} \right)^{\frac{1}{f(x) - 1} \cdot [f(x) - 1] \cdot g(x)} = \left[\left(1 + \frac{1}{f(x) - 1} \right)^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{[f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

De esta forma llegamos a la siguiente regla:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^x = 1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} - 1 \right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2-3x+1}{3x-1} \right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{3x-1} \right) \cdot x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^x = e$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right)^{2x} = 1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot 2x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right)^{2x} = +\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2-1} \right)^{-x} = 1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2-1} - 1 \right) \cdot (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x-x^2+1}{x^2-1} \right) \cdot (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2-1} \right) \cdot (-x) = -1$$

Ejercicio 1. Hallar los siguientes límites de potencias:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{2x+1}\right)^x$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x-3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+3x}{2x}\right)^{-3x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{1-x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x-1}{2x}\right)^{2x-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Ejercicio 2. Demuestra que, en general, se cumple los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax+b} = e^a, \text{ siendo } a, b \text{ dos } n^\circ \text{ reales cualesquiera}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ siendo } k \text{ cualquier } n^\circ \text{ real}$$