1 CÁLCULO DE LÍMITES POTENCIAL, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICO

1.1.- Orden de un infinito.

Toda función f(x) se llama infinito para x = a cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Ejemplo 1: *Las siguientes funciones son infinitos:*

a) $\lim_{x \to 3} \frac{2x-3}{x-3} = \infty$ b) $\lim_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = \infty$

Cuando $x \to \infty$ las variables x, x^2, x^3,…. son infinitos y éstas se toman como tipos de comparación de otros infinitos.

Comparación de infinitos:

Consideremos dos funciones f(x) y g(x) que verifican: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$

- Diremos que f(x) es un ***infinito de orden superior*** a g(x) si crece más rápidamente, es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- Diremos que f(x) es un ***infinito de igual orden*** a g(x) si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

- Diremos que f(x) es un ***infinito de orden inferior*** a g(x) si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejemplo 2:

El polinomio Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + a_n x^n$ es un infinito de orden n, ya que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{x^n} = a_n$$

1.2.- Limite de función exponencial.

Cuando x crece, las potencias de a se hacen tan grandes como queramos o tan pequeñas como queramos dependiendo si a es mayor o menor que 1.

- Si a > 1 $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- Si a < 1 $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Teniendo en cuenta que $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, deducimos:

- Si a > 1 $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
- Si a < 1 $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

- Cuando $x \to +\infty$, cualquier función exponencial a^x de base a> 1 es un infinito de orden superior a la potencia x^n (n>0), cualquiera que sea n.
- Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior.
- Las potencias de x son infinitos de orden superior a las funciones logarítmicas.
- Dos funciones exponenciales de la misma base son infinitos del mismo orden.

Ejemplo 1:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2+3} = +\infty$ por ser 2^x es un infinito de orden superior a $x^2 + 3$

Ejemplo 2:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x+1}}{3^{x-1}} = 0$ por ser 2^{x+1} un infinito de orden inferior a 3^{x-1}

1.3.- Limite de función logarítmica.

- Si a > 1 $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- Si a < 1 $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$
- Si a > 1 $\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$
- Si a < 1 $\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$

- Cuando $x \to +\infty$, cualquier función potencial x^n con n > 0 es un infinito de orden superior a la función logarítmica, $\log_a x$, para cualquier base a >1 .

- Cuando $x \to +\infty$, cualquier función exponencial a^x con a>1 es un infinito de orden superior a la función logarítmica, $\log_b x$, para cualquier base b >1 .

Ejemplo 1:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+2)}{x^2+5} = 0$ por ser log(x+2) un infinito de orden inferior a $x^2 +5$

Ejemplo 2:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ por ser x un infinito de orden inferior a ln x

Ejemplo 3:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ por ser e^x un infinito de orden superior a $\ln x^3$

Ejemplo 4:

$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0$ por ser x^2 un infinito de orden superior a ln x