1 LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

¿Cómo determinar el límite de una función cuando la variable x se aproxima a un valor "x_0"?

En general, para tener una idea de la respuesta basta evaluar la función en puntos x cada vez más próximos a x_0, tomando:

-Valores inferiores a x_0, es decir, aproximándonos por la izquierda.

-Valores superiores a x_0, es decir, aproximándonos por la derecha.

Ejemplo 1

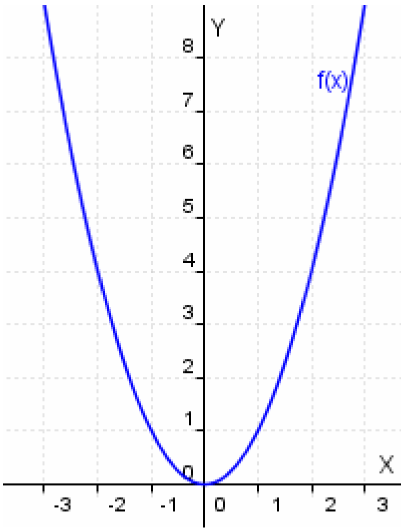
Consideremos la función $y = f(x) = x^2$.

Mediante una tabla de valores, construimos la gráfica de esta función, que es una parábola con vértice en el origen de coordenadas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Nos hacemos la siguiente pregunta: "Si x se aproxima a 0, ¿a qué valor se aproxima la función?"

Fijándonos en la gráfica, podemos responder fácilmente a la pregunta formulada.



Aproximándonos a 0 por la izquierda, la función se aproxima a 0.

$x \to 0^-$	-1	-0´1	-0´01	-0´001	-0´0001
$f(x) \to ?$	1	0´01	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}

Diremos entonces que el ***límite lateral por la izquierda*** de la función cuando x tiende a 0 es 0.

Simbólicamente, se escribe $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Aproximándonos a 0 por la derecha, la función se aproxima a 0.

$x \to 0^+$	1	0´1	0´01	0´001	0´0001
$f(x) \to ?$	1	0´01	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}

Diremos entonces que el ***límite lateral por la derecha*** de la función cuando x tiende a 0 es 0.

Simbólicamente, se escribe $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Observa que al aproximarse x a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores correspondientes de la función se aproximan a 0.

Por tanto, el nº 0 se llama **límite de la función** f(x) en x = 0. Se denota:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Formalizamos el concepto de límite mediante el uso de entornos.

Definimos:

- ***Entorno de centro a y radio r,*** *E(a, r),* al intervalo abierto *E(a, r)* = (a – r, a + r)
- ***Entorno reducido de centro a y radio r,*** *E*(a, r),* al intervalo abierto *E*(a, r)* = (a – r, a + r) – {a }

Es decir; un valor x pertenece al entorno E(a, r) si:

$x \in E(a, r) \Leftrightarrow x \in (a - r, a + r) \Leftrightarrow a - r < x < a + r \Leftrightarrow -r < x - a < r \Leftrightarrow |x - a| < r$

- Se dice que el número L es el ***límite de la función f cuando x tiende a x_0*** cuando al tomar valores muy próximos a x_0, pero distinto de x_0, los valores de la función también están muy próximos a L, de manera que dicha distancia se puede hacer tan pequeña como se quiera.

  Es decir,

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{si se verifica que } f(x) \to L \text{ cuando } x \to x_0$$

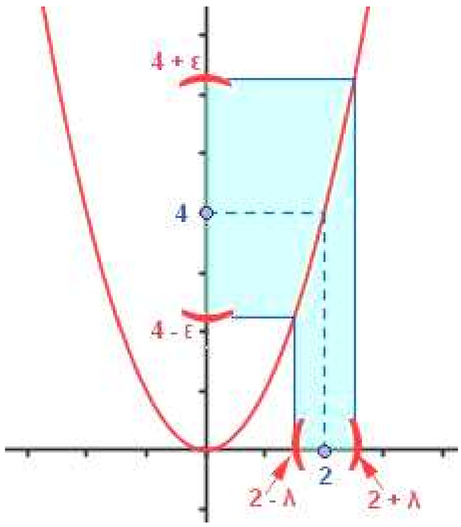
  Otras definiciones más exhaustivas:

  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si $\forall E(L, \varepsilon),\ \exists\ E(x_0, \delta) /\ \forall x \in E^*(x_0, \delta) \to f(x) \in E(L, \varepsilon)$
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

- Si existe el límite de la función f cuando $x \to x_0$, se dice que la función es ***convergente*** en x_0.

Ejemplo 2

Consideremos la función $y = f(x) = x^2$



Veamos gráficamente que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$:

Tomamos cualquier entorno de centro x = 2, (2 – λ, 2 + λ).

Considerando cualquier punto de dicho entorno se verifica que su imagen se encuentra muy próxima a 4, es decir, en un entorno de centro 4.

1.1. LÍMITES LATERALES

Definiciones:

- ***Límite por la izquierda***: límite de la función tomando valores de x próximos a x_0 pero inferiores a x_0.

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = L$ si se verifica que f(x) → L cuando x → x_0 (tomando valores x < x_0)

- ***Límite por la derecha***: límite de la función tomando valores de x próximos a x_0 pero superiores a x_0.

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = L$ si se verifica que f(x) → L cuando x → x_0 (tomando valores x > x_0)

Una definición más exhaustiva:

- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, x_0 - \delta < x < x_0 \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, x_0 < x < x_0 + \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Condición necesaria y suficiente de convergencia.

- Para que exista el límite de una función f(x) cuando x tiende a un punto dado, tienen que existir los dos límites laterales y ser iguales:

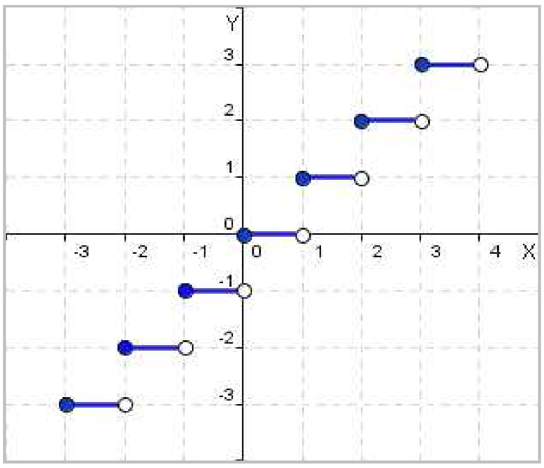
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

- Cuando los límites por la izquierda y por la derecha de una función en un punto son distintos, no existe el límite de la función en dicho punto.

Ejemplo 3

Sea la función parte entera de x: f(x) = E(x)

Se define como el número entero inmediatamente inferior a x o igual que él.



Para cualquier entero z se verifica que no existe el límite de la función ya que se verifica:

- $\lim_{x\to z^+} f(x) = z$
- $\lim_{x\to z^-} f(x) = z - 1$

El valor que toma una función en un punto no influye en el valor del límite.

Para que exista el límite de una función en un punto en $x = x_0$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en dicho puntos sino en sus proximidades. De hecho hay casos en los que no está definida la función en un punto pero sí existe el límite.

En muchas ocasiones, el límite de una función en un punto dado x_0, coincide con su imagen $f(x_0)$. En tal caso, se dice que la ***función*** es ***continua*** en x_0.

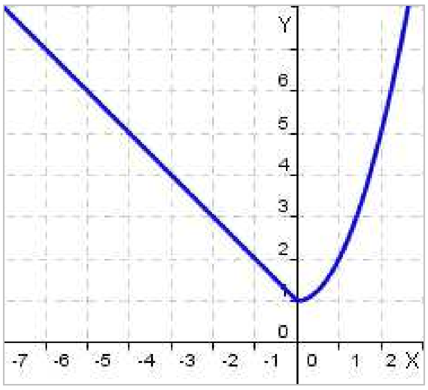
$$f \text{ continua en } x = x_0 \text{ si } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ejemplo 4

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



Calculamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1$

Ambos límites coinciden, por tanto, existe el límite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

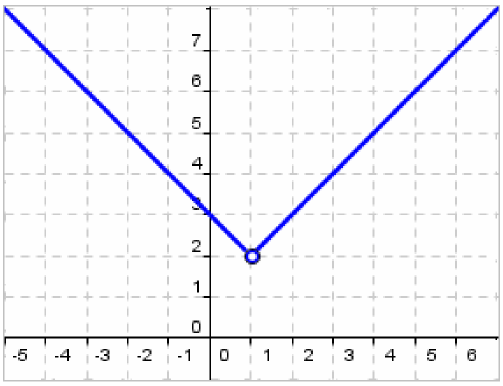
Además coincide con su imagen f(0) = 1

Ejemplo 5

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3 - x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Estudiamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



Calculamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3 - x) = 2$

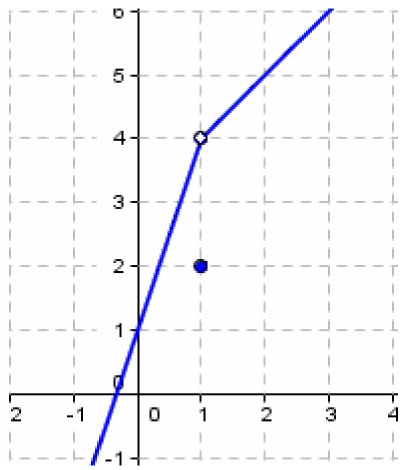
Ambos límites coinciden, por tanto, existe el límite:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Sin embargo, la función no está definida para x = 1

Ejemplo 6

Dada la función f definida a trozos, determinar si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x>1 \\ 2 & \text{si} \quad x=1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$$

Estudiamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} (x+3)=4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} (3x+1)=4$

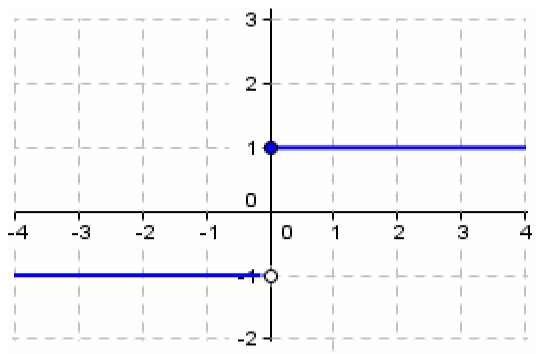
Coinciden los límites laterales, por tanto, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$

Pero no coincide con la imagen de x = 1:

$$f(1) = 2$$

Ejemplo 7

Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ determinar si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



Recordemos que $|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

Con lo cual la función f(x) es una función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -\dfrac{x}{x} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Estudiamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \left(-\dfrac{x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} (-1)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} (1)=1$

No coinciden los límites laterales, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

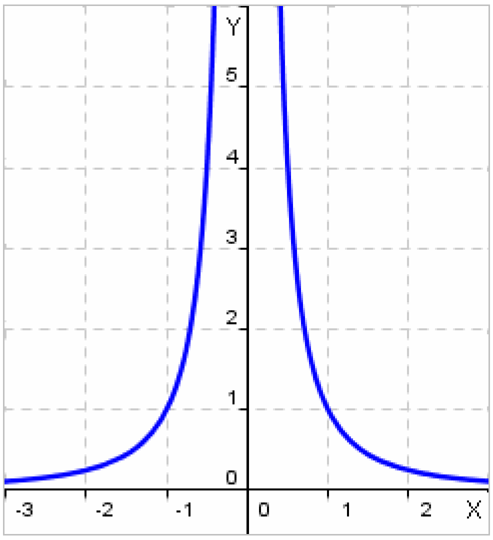
Sin embargo la función está definida en el punto: f(0) = 1

2 LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Consideremos una función real de variable real y = f(x). Vamos a estudiar las diferentes situaciones que se puede presentar si f(x) se aproxima a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando x se aproxima a un valor finito x_0.

Ejemplo 8

Sea la función: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Estudiamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



En la gráfica podemos observar que a medida que nos aproximamos a 0 por la izquierda, los correspondientes valores que toma la función son cada vez mayores.

En tal caso, diremos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

Del mismo modo, si nos aproximamos a 0 por la derecha, los valores que toma la función son cada vez mayores.

En tal caso, diremos que:

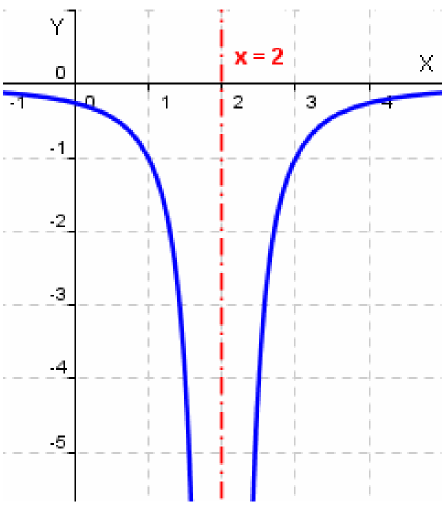
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Al tomar valores de x próximos a 0, su imagen f(x) se aproxima a $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Ejemplo 9

Sea la función: $f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Estudiamos $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



Si nos aproximamos a 2 por la izquierda, los valores que toma la función son cada vez menores. Es decir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Del mismo modo, si nos aproximamos a 2 por la derecha, sus imágenes correspondientes son cada vez menores. Por tanto, diremos que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

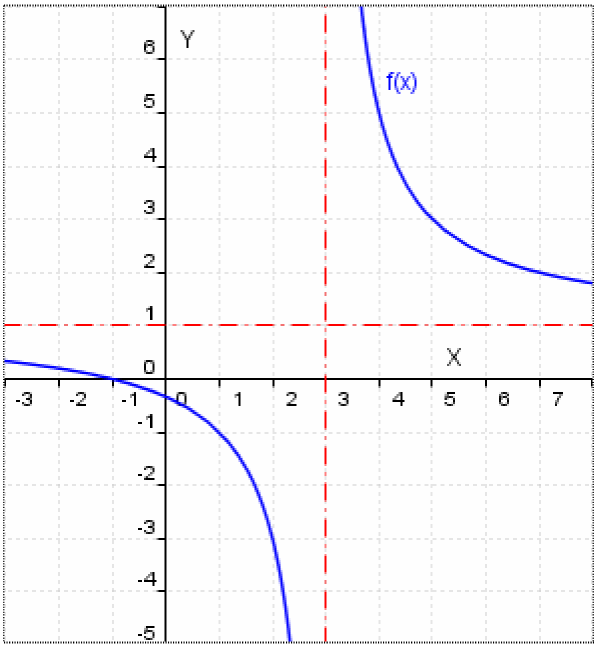
Al tomar valores de x próximos a 2, su imagen f(x) se aproxima a $-\infty$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 10

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

Sabemos que una función racional no está definida para los valores de x que anulen el denominador, ya que no tiene sentido la división. Sin embargo, la función sí está definida para los valores próximos a ellos, ¿qué comportamiento tiene la función en esos valores próximos?



Dom(f) = { x ∈ / x – 3 ≠ 0 }= ℝ – {3}

Veamos qué ocurre con la función cuando x toma valores próximos a 3.

Para ello construimos una tabla de valores para estudiar la aproximación por la izquierda: $x \to 3^-$

x	1	2	2´9	2´99	2´999
f(x)	-1	-3	-39	-399	-3999

Vemos que al tomar valores próximos a 3, pero inferiores a él, la función se va haciendo cada vez mayor en valor absoluto pero negativo.

Diremos que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

Del mismo modo se puede comprobar que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

Por tanto, diremos que no existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Gráficamente, dibujada la recta x = 3 se observa:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$: al aproximarse la curva por la izquierda se “dispara hacia abajo”, decrece indefinidamente.
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$: al aproximarse la curva por la derecha se “dispara hacia arriba”, crece indefinidamente.

En ambas situaciones, la curva no corta nunca a dicha recta (ya que la función no está definida para dicho valor)

Cuando se produce esta situación de crecimiento o/y decrecimiento indefinido de la función cuando la variable x se aproxima a un valor x_0, se dice que la función presenta una ***asíntota vertical*** de ecuación $x = x_0$.

En nuestro ejemplo, la función tiene una asíntota vertical en $x = 3$ ya que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$

Definiciones:

- Se dice que el ***límite de una función y = f(x) cuando x tiende a x_0 es "más infinito"*** cuando al tomar valores muy próximos a x_0, pero distinto de x_0, los valores de f son muy grandes y positivos, de manera que f supera cualquier número prefijado (f crece tanto como se quiera).

Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists\ E(x_0, \delta) /\ \forall x \in E^*(x_0, \delta) \to f(x) > M$$

Una definición más exhaustiva:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ si } \forall M > 0, \exists\, \delta > 0 /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

- Se dice que ***el límite de una función y = f(x) cuando x tiende a x_0 es "menos infinito"*** cuando al tomar valores muy próximos a x_0, pero distinto de x_0, los valores de f son muy grandes en valor absoluto pero negativos, de manera que f supera cualquier número prefijado (f decrece tanto como se quiera).

Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ si } \forall K > 0,\ \exists\ E(x_0, \delta) /\ \forall x \in E^*(x_0, \delta) \to f(x) < K$$

Una definición más exhaustiva:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ si } \forall M > 0, \exists\, \delta > 0 /\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

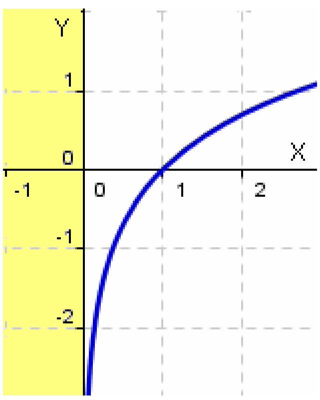
- Si existe el límite de la función f cuando $x \to x_0$, se dice que la ***función*** es ***divergente*** en x_0.

- Se dice que la función f(x) tiene una ***asíntota vertical en x = k*** si se verifica una de estas condiciones:

1) $\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$ 2) $\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$ 3) $\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$

Ejemplo 11

Sea la función: f(x) = ln x . Estudiamos $\lim_{x \to 0^+} f(x)$



Dom f = (0,+ ∞)

Si nos aproximamos a 0 por la derecha, la función va tomando valores cada vez más pequeño.

Por tanto:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

No tiene sentido calcular el límite por la izquierda porque la función no está definida para valores menores que cero.

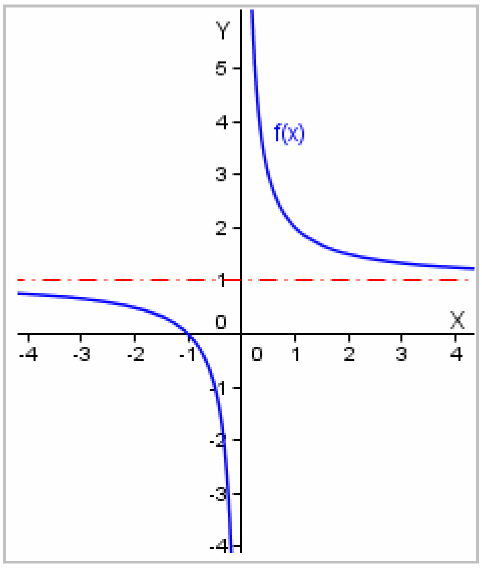
3 LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

En muchas ocasiones interesa conocer el comportamiento de una función dada, cuando la variable x toma valores muy grandes.

¿Estará la función acotada o crecerá (decrecerá) progresivamente?

Ejemplo 12

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$



Veamos qué ocurre con la función cuando x toma valores grandes. Para ello construimos una tabla de valores.

x	10	100	1000	10^4	10^5
f(x)	1´1	1´01	1´001	1´0001	1´00001

Tanto la tabla de valores como la gráfica muestran que cuando crece el valor de x, el valor de la función se va aproximando a 1.

¿Existirá algún valor de x para el cual f(x) = 1?

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x}=1 \Rightarrow x + 1 = x \Rightarrow 1 = 0 \ !!$$

Luego la función no toma el valor 1.

Esta tendencia se justifica con facilidad, teniendo en cuenta que $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

Conforme x crece, el cociente $\dfrac{1}{x}$ se hace gradualmente más pequeño y, por tanto, la función se va aproximando a 1.

Por este motivo se dice que el límite de la función cuando x tiende a más infinito es 1. Se denota:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

Gráficamente, este tipo de límites en el infinito se aprecia por el acercamiento progresivo (sin tocar) de la curva a una recta horizontal (en nuestro caso, y = 1) hasta confundirse con ella.

Cuando se presenta esta situación se dice que la función presenta una ***asíntota horizontal*** de ecuación y = 1

Definiciones:

- Se dice que el ***límite de la función f cuando x tiende a $+\infty$ es el nº real L***, cuando al tomar x valores positivos suficientemente grandes, la imagen f(x) se aproxima a L, tanto como se quiera.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, podemos encontrar un nº M > 0 tal que si $x > M$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

- Se dice que ***el límite de la función f cuando x tiende a $-\infty$ es el nº real L***, cuando al tomar x valores negativos suficientemente pequeños, la imagen f(x) se aproxima a L, tanto como se quiera.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, podemos encontrar un nº K > 0 tal que si $x < K$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

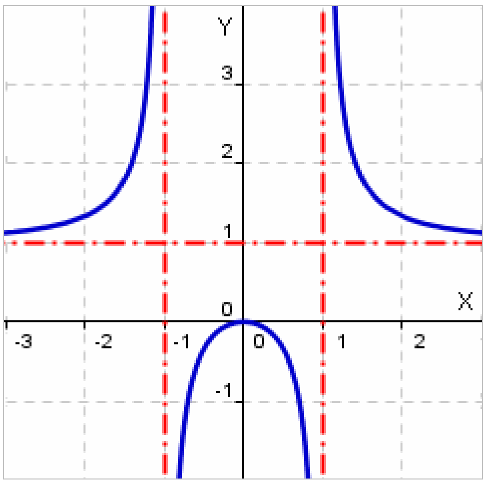
- Se dice que la función f(x) tiene una ***asíntota horizontal*** en y = k si se verifica $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ ó $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ o ambos.

  ¡ OJO!: La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x.

Ejemplo 13

Sea la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Estudiamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, teniendo en cuenta su gráfica:



En la gráfica podemos observar que a medida que la variable x toma valores negativos más pequeños, los correspondientes valores que toma la función se van aproximando cada vez más al valor 1.

En tal caso, diremos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Del mismo modo, si tomamos valores de x positivos lo suficientemente grande, los valores que toma la función se van aproximando a 1.

En tal caso, diremos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

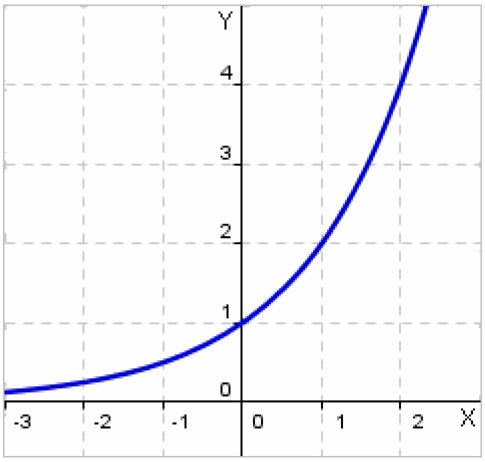
Teniendo en cuenta esto, la función presenta una asíntota horizontal de ecuación y = 1.

4 LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

Veamos otras situaciones que se pueden presentar al estudiar la función cuando la variable x tiene a infinito.

Ejemplo 14

Sea la función: $f(x) = 2^x$. Estudiamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



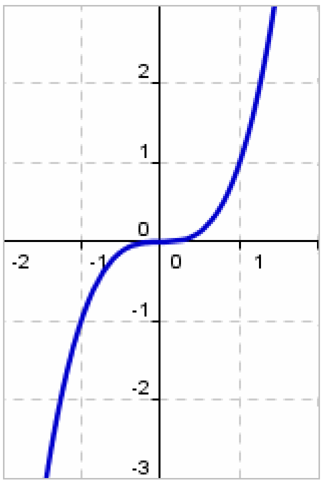
En la gráfica podemos observar que a medida que la variable x toma valores positivos lo suficientemente grande, la imagen f(x) toma valores positivos tan grandes como se quiera.

Escribimos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Ejemplo 15

Sea la función: $f(x) = x^3$. Estudiamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



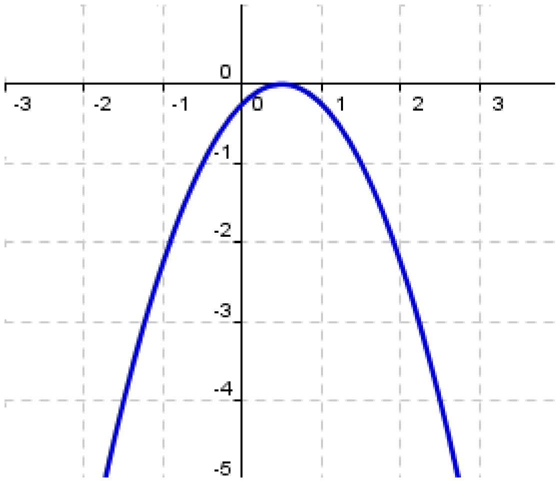
En la gráfica podemos observar que para valores negativos y muy grandes, en valor absoluto, de x, los correspondientes valores f(x) que toma la función se hace cada vez más pequeños.

Escribimos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 16

Sea la función: $f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Estudiamos $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$



Teniendo en cuenta, la gráfica:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Definiciones:

- Se dice que el ***límite de la función f cuando x tiende a*** $+\infty$ ***es*** $+\infty$, cuando al tomar x valores positivos suficientemente grandes, los valores que toma la función también lo son.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0$, podemos encontrar un nº real $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $f(x) > K$

- Se dice que ***el límite de la función f cuando x tiende a*** $+\infty$ ***es*** $-\infty$, cuando al tomar x valores positivos suficientemente grandes, los valores que toma la función son cada vez más pequeños.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0$, podemos encontrar un nº $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $f(x) < K$

- Se dice que el ***límite de la función f cuando x tiende a*** $-\infty$ ***es*** $+\infty$, cuando al tomar x valores negativos y muy grandes, en valor absoluto, los valores que toma la función son cada vez más grandes.

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0$, podemos encontrar un nº real $M > 0$ tal que si $x < M$ entonces $f(x) > K$

- Se dice que ***el límite de la función f cuando x tiende a*** $-\infty$ ***es*** $-\infty$, cuando al tomar x valores negativos y muy grandes, en valor absoluto, la imagen f(x) también lo son.

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0$, podemos encontrar un nº $M > 0$ tal que si $x < M$ entonces $f(x) < K$

5 OPERACIONES CON LÍMITES

Sean f y g dos funciones convergentes en x = a, se verifican las siguientes propiedades:

1) Límite de un **producto de un escalar por una función**:

$$\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right] = k\cdot\lim_{x\to a} f(x), \text{ donde k es un número real.}$$

2) Límite de una ***suma*** o una ***diferencia*** de dos ***funciones***:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

3) Límite de un ***producto*** de dos ***funciones***

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

4) Límite de un ***cociente*** de dos ***funciones***:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

5) Límite de una ***potencia*** de ***funciones*:**

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

6) Límite de la ***raíz*** de una ***función:***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ si se cumple alguna de las condiciones siguiente:

a) $L\geqslant 0$ y n es cualquier número natural

b) $L\leqslant 0$ y n es un número natural impar

7) Límite del ***logaritmo*** de una ***función***:

$$\lim_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right] = \log_b\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \text{ si } b>0 \text{ y } f(x)>0$$

8) Límite de ***funciones trigonométricas***:

$$\lim_{x\to a}\left[\operatorname{sen} f(x)\right] = \operatorname{sen}\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

$$\lim_{x\to a}\left[\cos f(x)\right] = \cos\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

$$\lim_{x\to a}\left[\operatorname{tg} f(x)\right] = \operatorname{tg}\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

Operaciones con expresiones infinitas:

En el caso de límites infinitos son aplicables las operaciones anteriores siempre que no se produzca ninguna de las siguientes *indeterminaciones*:

$$\frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \infty-\infty \;;\; 0\cdot\infty \;;\; 1^{\infty} \;;\; 0^0 \;;\; \infty^0$$

La siguiente tabla muestra los diferentes resultados que obtenemos al operar con límites infinitos:

SUMA Y RESTA	PRODUCTO
• $L+(+\infty)=+\infty$ • $L+(-\infty)=-\infty$ • $+\infty+(+\infty)=+\infty$ • $-\infty+(-\infty)=-\infty$ • $+(-\infty)=-\infty=-(+\infty)$ • $-(-\infty)=+\infty$	• $L\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{si } L>0\\ -\infty & \text{si } L<0\end{cases}$ • $L\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \text{si } L>0\\ +\infty & \text{si } L<0\end{cases}$ • $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ • $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ • $(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
COCIENTE	**POTENCIA**
• $\frac{L}{+\infty}=\frac{L}{-\infty}=0$ • $\frac{0}{+\infty}=\frac{0}{-\infty}=0$ • $\frac{L}{0}=\begin{cases}+\infty & \text{si } L>0\\ -\infty & \text{si } L<0\end{cases}$ • $\frac{+\infty}{0}=+\infty \;;\; \frac{-\infty}{0}=-\infty$	• $L^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si } L\geq 1\\ 0 & \text{si } 0<L<1\end{cases}$ • $L^{-\infty}=\begin{cases}0 & \text{si } L\geq 1\\ +\infty & \text{si } 0<L<1\end{cases}$ • $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$ • $(+\infty)^{-\infty}=0$ • $(+\infty)^{L}=\begin{cases}+\infty & \text{si } L>0\\ 0 & \text{si } L<0\end{cases}$

Ejemplo 17

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x+2}\cdot\frac{1-x}{2}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+2}+\frac{x+1}{2x}\right)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}\right)=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)^x=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+x^2)^{x+1}=0$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)(2-x)=-\infty$

6 CÁLCULO DE LÍMITES

1) **Límite de una constante**: Si f(x) = k $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = k$

2) **Límite de la función identidad**: Si f(x) = x $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = a$

3) **Límite de la función potencia**: Si $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = a^n$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n>0 \\ 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n>0, n \text{ par} \\ -\infty & \text{si } n>0, n \text{ impar} \\ 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n<0 \end{cases}$$

4) **Límite de una función polinómica**, f(x) = P(x): $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

5) **Límite de una función exponencial**:

- Si a > 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- Si 0 < a < 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

Teniendo en cuenta que $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, deducimos:

- Si a > 1 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Si 0 < a < 1 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

6) **Límite de una función logarítmica**:

- Si a > 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- Si 0 < a < 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$
- Si a > 1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
- Si 0 < a < 1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

Recuerda: Propiedades de los logaritmos:

1) $\log_a 1 = 0$ 2) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x\cdot y)$ 3) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$

4) $k\cdot \log_a x = \log_a \left(x^k\right) \ \forall k \in \mathbb{R}$ 5) Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Ejemplo 18

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x} = 0$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x} = +\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x+1) = -\infty$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$

7 RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Con las reglas dadas en el apartado anterior se nos presentan situaciones más complicadas en las que no podemos dar la solución sin hacer un estudio detallado de la función.

Cuando los límites no son finitos no se puede predecir los resultados en los siguientes casos:

$$\frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \infty-\infty \;;\; 0\cdot\infty \;;\; 1^{\infty} \;;\; 0^0 \;;\; \infty^0$$

Las técnicas necesarias para resolver estos casos indeterminados:

1) Por descomposición en factores de un polinomio.
2) Por producto y división de la mayor potencia de x
3) Por producto y división del conjugado de un binomio.

Pero en primer lugar, veamos con ejemplos qué significa que $\frac{\infty}{\infty}$ es una indeterminación.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow$ ¿ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$?

El valor de dicho límite dependerá de las funciones tomadas.

Ejemplo 19

1) Sea $f(x) = x^2$, $g(x) = x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Realizando operaciones, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

2) Sea $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo todo por la mayor potencia de x, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

3) Sea $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Realizando operaciones, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\infty} 3=3$$

7.1. Cálculo de límites $\frac{0}{0}$

Este tipo de indeterminaciones aparece normalmente en cocientes de funciones polinómicas o de funciones irracionales.

a) Por factorización.

Las indeterminaciones de cocientes de funciones polinómicas se resuelven factorizando los polinomios y simplificando la fracción.

Ejemplo 20

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$

Factorizamos los polinomios aplicando las identidades notables:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}=\frac{0}{0}$

Factorizamos los polinomios aplicando la regla de Ruffini:

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-3}$, que no existe ya que:

- $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{x-3}=+\infty$ ($x>3 \Rightarrow x-3>0$)
- $\lim_{x\to 3^-}\frac{x-2}{x-3}=-\infty$ ($x<3 \Rightarrow x-3<0$)

3) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{2x^2-6x-8}}=\frac{0}{0}$

Factorizamos los polinomios del radicando aplicando la regla de Ruffini:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{x^2-3x-4}}=\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x-4}}=\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x-4)}}=\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

4) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{0}{0}$

Factorizamos los polinomios del radicando aplicando la regla de Ruffini:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}}=\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

b) Por el conjugado

Las indeterminaciones de cociente de funciones irracionales se resuelven multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión irracional.

Ejemplo 21

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de $\sqrt{x}-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{0}{0}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de $1-\sqrt{1-x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+27}}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de $2x-\sqrt{x^2+27}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+27}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+27}\right)}{(x-3)\left(2x+\sqrt{x^2+27}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-27}{(x-3)\left(2x+\sqrt{x^2+27}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(\cancel{x-3}\right)(x+3)}{\left(\cancel{x-3}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+27}\right)}=\frac{9}{\sqrt{27}}=\sqrt{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{0}{0}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{0}{0}$$

Volvemos a obtener una indeterminación, por tanto, volvemos a multiplicar y dividir por el conjugado, en este caso, por $x+\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(x+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=0$$

c) Reduciendo las raíces a índice común

En ocasiones para resolver la indeterminación dada por el cociente de funciones irracionales hay que reducir a denominador común para poder descomponer los radicando y simplificar.

Ejemplo 22

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} = \dfrac{0}{0}$

Descomponemos los dos radicando:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)x}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$$

Descomponiendo los dos radicando, obtenemos factores comunes que no podemos simplificar ya que las dos raíces son de distinto índice, por este motivo, reducimos a índice común:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)x}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt[6]{\frac{(x-2)^2x^2}{(x-2)^3(x+3)^3}} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}} = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{0}{0}$

Reduciendo las raíces a índice común

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{0}{0}$

Reduciendo las raíces a índice común

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x\to 2} \sqrt[6]{\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2(x+2)^2}} = \lim_{x\to 2} \sqrt[6]{\frac{x-2}{(x+2)^2}} = 0$$

d) *Empleando infininitésimos equivalentes*

Este procedimiento se empleando cuando trabajamos con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

En el tema de la derivada de una función estudiaremos la regla de L´Hôpital como aplicación a la resolución de indeterminaciones.

Definición:

Consideremos dos funciones f(x) y g(x) que verifican: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Si el límite del cociente de ambas funciones tiene por límite 1 en el punto x = a toman valores prácticamente iguales en un entorno de ese punto. Las funciones que tienen esta propiedad se llaman ***funciones infinitésimos equivalentes***. Se denota f ~ g

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ siendo } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Un resultado interesante y útil en el cálculo de límites es el siguiente teorema que permite sustituir en el cálculo de límites una función por otra equivalente:

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite de la expresión no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

Los infinitésimos equivalentes más empleados son los indicados en la tabla de abajo.

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo, es decir, $\alpha(x) \to 0$.

TABLA DE INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES (más usuales)		
$x \to 0$	**$\alpha(x) \to 0$**	**Ejemplo**
$\text{sen } x \sim x$	$\text{sen } \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\text{sen } 4x \sim 4x$
$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha(x)^2$	$1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2} \cdot 4x^2$
$\text{tg } x \sim x$	$\text{tg } \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\text{tg } 5x \sim 5x$
$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$	$\ln(1 + 2x) \sim 2x$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	$e^{4x} - 1 \sim 4x$

En el APÉNDICE I se demuestra estas equivalencias.

Ejemplo 23

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,7x}{x}=\dfrac{0}{0}$

Sustituyendo directamente sen 7x por 7x (funciones equivalentes).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,6x}{\text{tg}2x}=\dfrac{0}{0}$

Sustituyendo directamente sen 6x ~ 6x y tg 2x ~ 2x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,6x}{\text{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=\lim_{x\to 0}3=3$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,5x}{\text{sen}\,2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$ (sen 5x ~ 5x, sen 2x ~2x)

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2\,3x}{x\,\text{sen}\,2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^2}{x\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{2x^2}=\dfrac{9}{2}$

Aplicamos la equivalencia: sen 3x ~ 3x, sen 2x ~ 2x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\,3x}{x\,\text{sen}\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\dfrac{0}{0}$

Sustituyendo $\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\sim\frac{x}{2}$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=1\cdot 0=0$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(1-\cos x)}{\text{sen}^3 x}=\dfrac{0}{0}$

Aplicamos las equivalencias de las funciones: $\dfrac{x^2}{2}\sim 1-\cos x$ y sen x ~ x

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)}{\text{sen}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}=\dfrac{0}{0}$

Sustituyendo $\frac{1}{2}(2x)^2\sim(1-\cos 2x)$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{4x^2}{2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$

7.2.- Cálculo de límites $\frac{\infty}{\infty}$

Aparece al calcular límite de cocientes de funciones polinómicas o irracionales.

Se resuelven dividiendo numerador y denominador por la potencia de x de mayor grado.

Ejemplo 24

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x-2} = \frac{\infty}{\infty}$ Dividimos por x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x-2} = \frac{\infty}{\infty}$ Dividimos por x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2+0}}{1+0} = \sqrt{2}$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Dividimos por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}+2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

REGLA PRÁCTICA

El límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$, es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador.

Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + a_n x^n$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2 x^2 + b_m x^m$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

El valor de este límite depende del valor que tengan *n* y *m*:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } g(P(x)) > g(Q(x) \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } g(P(x)) = g(Q(x) \\ 0 & \text{si } g(P(x)) = g(Q(x) \end{cases}$$

La regla anterior también es válida cuando aparecen expresiones radicales. $\left(\text{Recuerda}: \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}\right)$

a) Los infinitos: potencial, exponencial y logarítmica

Toda función f(x) se llama ***infinito*** para x = a cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Cuando x→ ∞ las variables x, x^2, x^3,…. son infinitos y éstas se toman como tipos de comparación de otros infinitos.

Cuando x → ∞ las funciones potenciales (x^n, n > 0), las exponenciales (a^x , a > 1) y las logarítmicas $\left(\left(\log_b x, b > 1\right)\right.$ son infinitos pero crecen de forma distinta:

- Si x → +∞, cualquier función potencial x^n con n > 0 es un infinito de orden superior a la función logarítmica, $\log_b x$, para cualquier base b > 1, es decir, crece más rápidamente, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\log_b x} = +\infty$$

  Lo escribimos $x^n >> \log_b x$

- Si x → +∞, cualquier función exponencial a^x con a > 1 es un infinito de orden superior a la función potencial, potencial x^n con n > 0, es decir, crece más rápidamente, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$$

  Lo escribimos $a^x >> x^n$

Por tanto, comparando estas funciones en cuanto a rapidez de crecimiento, tenemos:

$$a^x >> x^n >> \log_b x \text{, siendo a > 1, b > , n > 0}$$

Ejemplo 26

1) Las siguientes funciones son infinitos:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-3}{x-3} = \infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+3) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(x+2)}{x^2+5} = 0$ por ser log(x+2) un infinito de orden inferior a x^2 +5

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ por ser x un infinito de orden inferior a ln x

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ por ser e^x un infinito de orden superior a ln x^3

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ por ser 2^x un infinito de orden superior a x^2

7.3.- Cálculo de límites $\infty - \infty$

Para resolver este tipo de indeterminación suele bastar efectuar las operaciones indicadas.

En el caso en que aparezcan expresiones radicales, se multiplica y divide por la expresión conjugada de la dada.

Ejemplo 24

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{x^2-1}{x-2} = \infty - \infty$ Operamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+1}{x-2} = -2$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x} - x = \infty - \infty$ Operamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x} - x = \infty - \infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \infty - \infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1} = \infty - \infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{\left(\sqrt{2}x+x\right)} = +\infty$$

7.4.- Cálculo de límites $0\cdot\infty$

La indeterminación se resuelve efectuando la operación indicada en la expresión de la función y simplificando.

Ejemplo 25

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x+5}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}\right)=0\cdot\infty$ Efectuando las operaciones y simplificando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x+5)(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x+5)(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{(x+5)(x+1)}=\frac{7}{7\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2-1}\right)\sqrt{x-1}=0\cdot\infty$ Efectuando las operaciones y simplificando:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2-1}\right)\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1-x}{x^2-1}\right)\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x^2-1}\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\sqrt{x-1}(x+1)}=-\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{4x-4}}{x-2}\right)\cdot\frac{x+6}{x^2-4}=\frac{0}{0}\cdot\infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión $x-\sqrt{4x-4}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{4x-4})(x+\sqrt{4x-4})}{(x-2)(x+\sqrt{4x-4})}\cdot\frac{x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4x+4)}{(x-2)(x+\sqrt{4x-4})}\cdot\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+6)}{(x-2)^2(x+2)(x+\sqrt{4x-4})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)}{(x+2)(x+\sqrt{4x-4})}=\frac{8}{4\cdot 4}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^4-1}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}\cdot\infty$ Efectuando las operaciones y simplificando:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-1}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+2x-3}$$

Si $x\to 1^- \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow x^2+2x-3=(x-1)(x+3)<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

Si $x\to 1^+ \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x^2+2x-3>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$

Por tanto, no existe el límite.

7.5.- Cálculo de límites 0^0, $0^{+\infty}$, $0^{-\infty}$, ∞^0

Teniendo en cuenta que toda potencia se puede escribir como una potencia de base el número e, $a^b = e^{b \ln a}$, podemos escribir

$$\left[f(x) \right]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Y de esta forma expresar el límite como:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)}$$

Ejemplo 26

1) $\lim_{x \to 0^+} x^{\ln x} = (0)^{-\infty}$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot \ln x = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} x^{\ln x} = e^{+\infty} = +\infty$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln x} = (0)^{+\infty}$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot (-\ln x) = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln x} = e^{-\infty} = 0$$

7.6.- Cálculo de límites 1^∞

a) El número e

Uno de los límites de mayor importancia lo estudió el matemático suizo Leonard Euler:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

Si pasamos al límite se tiene la expresión 1^∞, que nos hace pensar erróneamente que vale 1.

Hay que tener en cuenta que $1 + \frac{1}{x} \neq 1$ para cualquier valor de x

Para analizar esta función vamos a construir una tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,521	2,546	2,565	2,581	2,593

Según la tabla, la función es creciente pero crece lentamente, con lo cual da lugar a pensar que exista $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ y sea finito.

x	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
f(x)	2,7048	2,7169	2,7181	2,71826	2,71828047	2,71828169	2,71828179

Su límite es un número irracional que se designa con la letra e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e = 2{,}71828182845904523536028747135 27\ldots.$$

El mismo resultado obtenemos si sustituimos x por cualquier función que tienda a infinito:

$$\text{Si}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

Ejemplo 27

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}=e$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=e$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^{\sqrt{x+2}}=e$

b) Límites relacionados con el número e

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se pueden calcular otros límites, aplicando la regla de límite de potencia de funciones.

Ejemplo 28

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^2$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^a$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=e^2$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^a$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e^3\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e^3\cdot 1=e^3$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b}=e^a$

c) Indeterminación 1^{∞}

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^{∞}

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

$$f(x)^{g(x)}=[1+f(x)-1]^{g(x)}=\left[1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)}$$

Hemos expresado la base de la forma $\left(1+\dfrac{1}{h(x)}\right)$ y ahora vamos a buscar que aparezca en el exponente de la potencia la función h(x), para ello multiplicamos y dividimos por h(x).

$$\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)}=\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]\cdot g(x)}=\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

De esta forma llegamos a la siguiente regla:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}}$$

Ejemplo 29

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{x}=1^{\infty}$ Aplicamos la regla

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2-3x+1}{3x-1}\right)x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{3x-1}\right)x=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x}=e$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{2x}=1^{\infty}$ Aplicamos la regla

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-1\right)2x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)2x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2x=+\infty\longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{2x}=+\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{-x}=1^{\infty}$ Aplicamos la regla

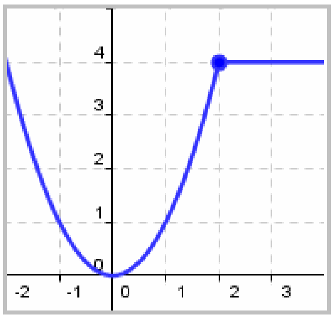
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}-1\right)\cdot(-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot(-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)\cdot(-x)=-1\longrightarrow$$

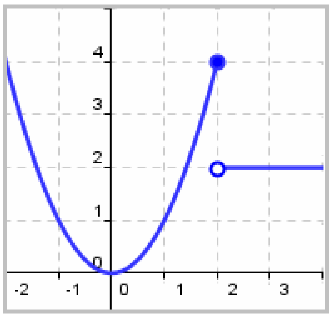
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{-x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

8 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

La idea intuitiva de continuidad de una función responde a la idea intuitiva de que a variaciones pequeñas de la variable x le corresponden variaciones pequeñas de la variable y, es decir, no existen saltos bruscos en la gráfica.

Ejemplo 30





En el primer caso, la gráfica no presenta ningún salto, por tanto, es una función continua. Sin embargo, en la gráfica de la derecha se presenta un salto en x = 2, diremos que la función no es continua en dicho punto.

Definición.

Sea f una función y $a \in$ Dom(f) decimos que f es una ***función continua en un punto x = a*** cuando el límite de la función en x = a coincide con el valor de la función f(x) en dicho punto.

- La continuidad de la función en x = a implica que se cumpla estas tres condiciones:

  a) La función esté definida en x = a, es decir, exista f(a)

  b) Exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

  c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 31

Dada la función:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Demuestra que es continua en x = 0.

Para demostrar la continuidad de la función en x = 0 hay que comprobar que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$

Para determinar dicho límite calculamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \rightarrow$ g es continua en x = 0

9 OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en x = a, se tiene entonces que:

a) La ***suma*** de dos funciones continuas en x = a es también una función continua en ese punto.

b) La ***resta*** de dos funciones continuas en x = a es también una función continua en ese punto.

c) El ***producto*** de dos funciones continuas en x = a es también una función continua en ese punto.

d) El ***producto*** de una función continua en x = a ***por un número real***, es otra función continua en ese punto.

e) El ***cociente*** de dos funciones continuas en x = a es otra función continua en ese punto. (Siempre que el denominador no se anule).

f) ***Composición de funciones***:

Si f(x) es continua en x = a y g(x) es continua en y = f(a) $\Rightarrow$ $(g \circ f)(x)$ es continua en x = a.

9.1.- Propiedad de las funciones continuas.

Si una función es continua en un punto $x = a$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Sin embargo, el teorema recíproco no es cierto en general.

Ejemplo 32

Sea la función f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Demuestra que existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pero la función no es continua en x = 2

a) Existe el límite cuando x $\to$ 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

Factorizamos para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

b) La función no está definida para x = 2:

Por ser una función racional, Dom (f) = $\mathbb{R}-\{2\}$

Por tanto no es continua en x = 2.

9.2.- Continuidad de funciones elementales

1) La función constante $f(x) = k$ es continua en todos los puntos.

2) La función identidad f(x) = x es continua en todos los puntos.

3) La función potencial $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es continua en todos sus puntos

4) La función polinómica es continua en todos sus puntos

5) La función racional es continua en todos sus puntos, salvo en los que se anula el denominador.

6) La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua en todos los puntos.

7) La función $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 1$, es continua en todos los puntos de su dominio: $(0, +\infty)$

8) La función f(x) = sen x es continua en todos sus puntos.

9) La función f(x) = cos x es continua en todos sus puntos.

10) La función f(x) = tg x es continua en todos sus puntos salvo en los puntos x que verifiquen cos x = 0

Ejemplo 33

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar a para que la función sea continua en x = -1
b) ¿Es continua en x = 1?

a) Para que la función sea continua en x = -1 se tiene que cumplir $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = a - 2$

Para calcular el límite para x = -1 estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (-x^2 + 2) = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x + a) = a - 2$$

Para que exista el límite hay que imponer que a – 2 = 1 → a = 3

b) Para que la función sea continua en x = 1 se tiene que cumplir $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$

Para calcular el límite para x = 1 estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (\ln x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (-x^2 + 3) = 2$$

Al no coincidir los límites laterales, no existe el límite de la función en x = 1.

Por tanto, la función no es continua en x = 1

10 DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Decimos que la función es ***discontinua*** en el punto x = a cuando no es continua en dicho punto.

Ejemplo 34

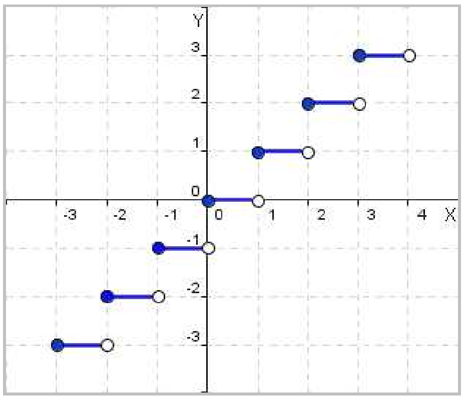
Sea f(x) = E(x)

Esta función presenta puntos de discontinuidad para todos los valores enteros de la variable x.

Estudiando el límite de la función para cualquier valor entero z:

- $\lim_{x\to z^+} E(x) = \lim_{x\to z} x = z$
- $\lim_{x\to z^-} f(x) = \lim_{x\to z} (x-1) = z-1$

Por tanto, la función no es continua en x = 2.



10.1.- Tipos de discontinuidades

Para que una función y = f(x) es ***discontinua en x = a*** deberá de cumplirse alguna de estas condiciones:

- La función no está definida en x = a
- No existe $\lim_{x\to a} f(x)$.
- Exista $\lim_{x\to a} f(x)$, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

1. *Discontinuidad evitable*

Una función presenta una *discontinuidad evitable* en un punto *x = a* cuando, existe el límite de la función en éste. Hay dos tipos:

a) Existe el límite de la función en éste, pero no coincide con el valor que toma la función en el punto:

$$x = a \text{ es un punto de discontinuidad evitable} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

b) La función no está definida para ese punto

2.- *Discontinuidad de salto finito*

Una función presenta una *discontinuidad de salto finito* en un punto *x = a* cuando los límites laterales existen pero son distintos, en cuyo caso no existe el límite.

$$x = a \text{ es un punto de discontinuidad de salto} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

3.- *Discontinuidad asintótica o de salto infinito*

Una función presenta una *discontinuidad asintótica* en un punto *x = a* cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

$$x = a \text{ es un punto de discontinuidad asintótica} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{y/ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 35

1) Analizar la continuidad de la función f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ pero f(2) no existe, por tanto, en x = 2 presenta una discontinuidad evitable.

Para todos los demás valores de x la función es continua por ser función racional.

2) Analizar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si} \quad x<2 \\ x-1 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$

En x = 2 hay un cambio en la expresión matemática de la función, así que hay que considerar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-3)=1$$

Ambos límites laterales coinciden, luego existe $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

En x = 2 es continua la función ya que $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$

En x = 4, no existe el límite ya que no coinciden los límites laterales:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(x-1)=3 \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(5)=5$$

Por tanto, en x = 4 presenta una discontinuidad de salto finito.

Para todos los demás valores de x la función es continua por ser función polinómica.

3) Analizar la continuidad de la función f(x) = $\dfrac{3x}{x-2}$

Se trata de una función racional, luego es continua para todos los valores de x ≠ 2

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x}{x-2}=+\infty \text{ (ya que x>2)} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{3x}{x-2}=-\infty \quad \text{(ya que x<2)}$$

Por tanto, en x = 2 presenta una discontinuidad de salto infinito.

4) Hallar a para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 2 \\ ax-1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ sea continua en x = 2

En x = 2 hay un cambio en la expresión matemática de la función, así que hay que considerar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(ax-1)=2a-1 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-1)=3$$

Para que sea continua en x = 2, se tiene que cumplir que los dos límites laterales coincidan:

$$2a-1=3 \Rightarrow a=2$$

APÉNDICE I

LÍMITE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. FUNCIONES EQUIVALENTES

Vamos a demostrar algunos límites necesarios para la derivación de funciones trigonométricas.

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo.

1.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Consideremos la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Esta función no está definida para x = 0. Sin embargo, como ahora veremos, existe el límite para x = 0.

Construimos una tabla de valores próximos a 0:

Por la izquierda:

$x \to 0^-$	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	…
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0,973	0,985	0,993	0,998	…

Por la derecha:

$x \to 0^+$	0,1	0,2	0,3	0,4	…
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0,998	0,993	0,985	0,973	…

Los resultados de la tabla sugieren que el límite es 1. Esto implica que x y sen x toman valores prácticamente iguales en el entorno de 0, ya que su cociente se aproxima a 1.

En las proximidades del 0 se verifica que $\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x$

Dividiendo la desigualdad por sen x, obtenemos: $1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$

Invirtiendo la expresión anterior obtenemos: $\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$

Tomando límite: $\lim\limits_{x\to 0} \cos x \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0} 1$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ se verifica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Cuando $x \to 0$, las funciones sen x y x son infinitésimos equivalentes.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Ejemplo

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 1$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

2.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

La sustitución directa conduce a la indeterminación $\frac{0}{0}$, pero expresando tg x = $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Cuando x $\to$ 0, las funciones tg x y x son infinitésimos equivalentes.

Ejemplo

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x^2}{3x^2} = 1$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} = 1$

3.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{0}{0}$$

Para hallar este límite basta tener en cuenta la fórmula del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{4x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

4.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

5.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

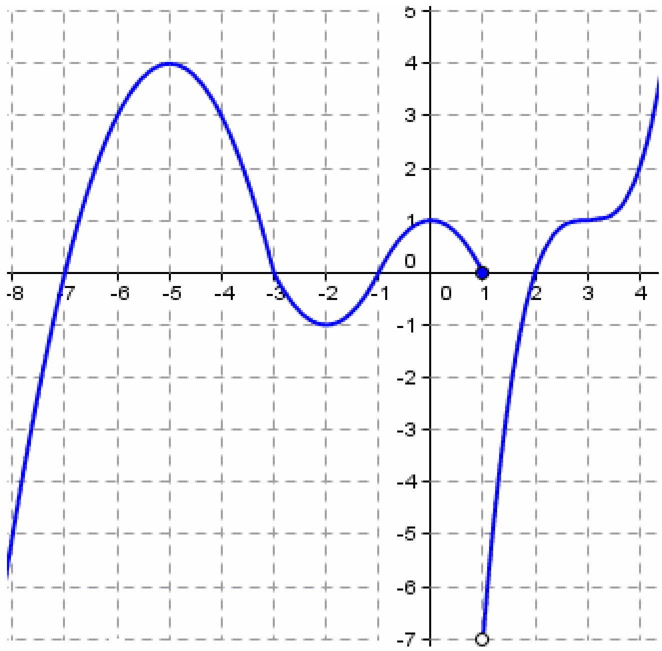
Teniendo en cuanta lo anterior:

$\ln(1+x) \sim x \Rightarrow e^{\ln(1+x)} \sim e^x \Rightarrow (1+x) \sim e^x \Rightarrow e^x - 1 \sim x$

EJERCICIOS

A.- Visión gráfica de límites

1. Sobre la gráfica de la función f (x), halla los siguientes límites:



1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

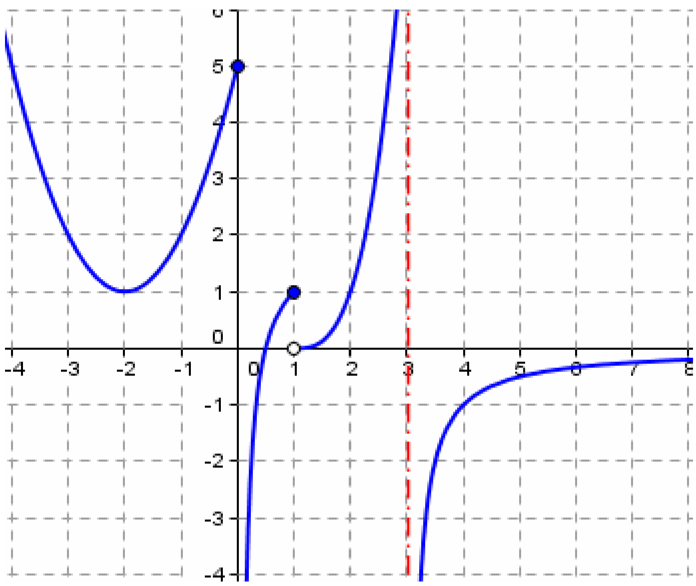
4) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

5) $\lim\limits_{x\to -5} f(x) =$

6) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

7) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$

2. Sobre la gráfica de la función f (x), halla los siguientes límites:



1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

5) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$

B.- Cálculo de límites inmediatos

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-4}$ e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^4}$

f) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3}$ g) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^7}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[5]{x^3}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}$

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to0^+} 3^{-\frac{1}{x}}$ g) $\lim\limits_{x\to0^+} 3^{-\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^{\frac{x}{2}}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^{-\frac{x}{2}}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_3 x$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$ m) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_3 x$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x^2$ o) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{3}} x$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x)^3}{x^3+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-4x+3}{x^2+x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(3x-1)}{(2x-1)^2+4x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-x+2}{x^3+x^2+3}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-3}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5x^3-2x+3}}{2x+1}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x}}$

6. Calcular los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en x = 0:

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{4x}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} 14x}{7x}$ c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$ d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 8x}{4x}$

e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+\operatorname{sen} x}{x}$

7. Calcular los siguientes límites, mediante comparación de infinitos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8^x}{2^{2x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{\ln(x+1)}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^{x+3}}{3^{x+5}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5}{3^{x-2}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg_2(x+1)}{\lg_3(x)}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-1}}{2^{-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2^{x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3+2x}\right)^{x+2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x-x^2+1\right)$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x}{\lg\left(x^2\right)}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2^x-x^2\right)$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$ o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1}$ p) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

C.- Operaciones con límites.

8. Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

Halla en el punto x = 2, los límites de las funciones:

$$f + g \;;\; f - g \;;\; 1/f \;;\; g \cdot f \;;\; g - f \;;\; f/g \;;\; g/f$$

9. Calcula los siguientes límites, especificando el valor de los límites laterales. Representa gráficamente los resultados:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$

10. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a) f(x) = $\frac{x^3}{x^2-4}$ en x = 2, x = -2 b) f(x) = $\frac{4x-12}{(x-2)^2}$ en x = 2, x = 0 y x = 3

11. Aplicando las propiedades de los límites, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{5x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+1}{2x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} (x^3+1)^{\frac{1}{x+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\frac{x-1}{4x+6}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x^2-3}{x^3+1} - \frac{2x-3}{x-1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{x-1}{x^2-1}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{x^2-3x+6}{x-4} \cdot \frac{x-2}{x^3-5}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi + x)$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi+x)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)+2}{e^{x-1}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{x+2}$ n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\log(x^2-2x) - \log(x^3-4x)\right]$

12. Hallar m y n sabiendo que $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(mx + n - \frac{3x^2}{x-1}\right) = 0$

13. Calcular $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, siendo:

a) F(x) = $\sqrt{x}$ b) F(x) = x^2 c) F(x) = $\frac{1}{x}$

14. Razona si la siguiente afirmación es verdadera:

"Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$"

D.- Cálculo de límites. Indeterminaciones.

15. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-7x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+12x-8}$

h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

j) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}$

n) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(1+x)^3}{x^3+1}$

o) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-4x^2+4x}$

p) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{2x^2+x-3}$

r) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

t) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2-5x+10}$

u) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$

v) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$

w) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$

x) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$

Soluciones: a) $-\dfrac{1}{3}$; b) -4 ; c) $-\dfrac{3}{2}$; d) $-\dfrac{2}{5}$; e) 0 ; f) 1 ; g) ∞ ; h) - ∞ ; i) $\dfrac{1}{8}$; j) 1 ; k) -$\dfrac{2}{5}$; l) 2 ; m) $\dfrac{1}{6}$; n) 0 ; o) $\dfrac{3}{2}$; p) 5 ; q) $\dfrac{1}{5}$; r) $\dfrac{2}{7}$; s) $\dfrac{1}{2}$; t) –4 ; u) $\pm\infty$; v) $\pm\infty$; w) $\dfrac{1}{3}$; x) $\dfrac{2}{3a}$

16. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{6}{x^2-2x-8}-\dfrac{1}{x-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{7x^2}-\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-3}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{2x}{x^2-2x-3}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x+1}-\dfrac{2x^2}{x-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+2}{x+5}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2+4}\cdot\dfrac{x^4-16}{x^2-x-2}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x-1}{x+4}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}\cdot\dfrac{x-2}{x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+a)^3-a^3}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3-x}}{2x}$

Soluciones: a) -1; b) $-\dfrac{1}{6}$; c) $\dfrac{1}{3}$; d) $-\dfrac{1}{2}$; e) $-\infty$; f) 0 ; g) ∞ ; h) -5 ; i) $\dfrac{3}{4}$; j) $-\dfrac{1}{3}$; k) 0 ; l) 0; m) $\dfrac{1}{2}$; n) $3a^2$; o) $-\dfrac{1}{18}$

17. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^3-8}}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^3+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x}\cdot\sqrt[3]{9x+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^3-27}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2+7}}{\sqrt[3]{x^2+2x}}$

h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt[4]{x^4-2x^2+1}}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt[3]{x^2+x-2}}$

k) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

m) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3+1}}$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3+x^2-5x+3}}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+3}}$

Soluciones: a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt[3]{-\dfrac{2}{3}}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) 1 ; e) $+\infty$; f) 0 ; g) $+\infty$; h) 0 ; i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; j) $\nexists$; k) $\dfrac{1}{2}$; l) 1 ; m) $\pm\infty$; n) 1 ; o)1

18. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{3x+13}-\sqrt{3x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-6x+1}-x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{7x+5}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-7x}-\sqrt{x^2+3x-6}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3x^2-6x}-\sqrt{3x^2}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

n) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

q) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

r) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3x+4}}{3x}$

t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

u) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x+2}}{2x-6}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8}{\sqrt{x^2+8x}-\sqrt{x^2+4x}}$

w) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$

Soluciones: a) 2 ; b) 0 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{3}{2}$; e) $-\dfrac{1}{4}$; f) -3; g) 0 ; h) $+\infty$; i) -5 ; j) $-\sqrt{3}$; k) $\dfrac{1}{2}$; l) $\dfrac{a}{2}$; m) $2\sqrt{3}$; n) 4 ; o) 2 ;

p) 0; q) $\dfrac{1}{6}$; r) 4; s) $-\dfrac{1}{3}$; t) $\dfrac{1}{2}$; u) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ v) 4 ; w) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; x) 2

19. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{x^2-3}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-x+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+10}-\sqrt{5x+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x+2}}{3x-6}$

f) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)\sqrt{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to3^+} \ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(x+1)\sqrt{x}}{x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-x^2}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-1-\sqrt{x}}{x-3}$

l) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+27}}{x-3}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-1}\cdot\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^3+5x}{x^2+1}-3x\right)$

p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{(2x-5)^2}{2x-1}-2x+1\right]$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{(x-2)^2}{x+2}-x-2\right]$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-x\right)$

s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x+1}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{1+2x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)\cdot\left(x^2+4\right)$

u) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{x-6}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{2+x}$

v) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{2}{x}\cdot\log(x+1)\right]$

w) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}}$

x) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2^x-\sqrt{x^2+1}\right)$

Soluciones: a) $2-\sqrt{3}$; b) $-\dfrac{3}{4}$; c) 0 ; d) $-\dfrac{2}{3}$; e) 0 ; f) ∞ ; g) $\ln\sqrt{3}$; h) 2 ; i) ∞ ; j) 0 ; k) $\dfrac{1}{3}$; l) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, m) $\sqrt{3}$;
n) -2; o) 0 ; p) -8 ; q) -8 ; r) -2 ; s) 1 ; t) $\pm\infty$; u) $-\dfrac{2}{3}$; v) 2 ; w) $\sqrt{2}$; x) $+\infty$

20. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{6x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-5}$

Soluciones: a) $e^{\frac{1}{4}}$; b) e^5 ; c) e^{-1}; d) e^{-6} ; e) $e^{\frac{2}{5}}$; f) 1; g) $e^{\frac{3}{2}}$; h) e^2 ; i) e^6

21. Hallar los siguientes límites del tipo del número e: $\left(\text{Recuerda}: \lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+3}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{5x+2}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x-4}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x+2}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{x^2-1}\right)^{x^2}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{-2x}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+1}{x}\right)^{2x^2+1}$ h) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-1}{2x}\right)^{2x-1}$ i) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{x}$

Soluciones: a) e^{14} ; b) e^3 ; c) 1 ; d) e^6 ; e) 0 ; f) 1 ; g) $+\infty$; h) $+\infty$; i) e^5

22. Hallar los siguientes límites del tipo del número e:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+2}\right)^{x+2}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}+1}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-2}\right)^{2x}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)^{-3x}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{1-x}$ h) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$ i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$

Soluciones: a) e^5 ; b) $e^{\frac{1}{3}}$; c) e^9 ; d) e ; e) e^6 ; f) 0 ; g) 0 ; h) $e^{\frac{3}{2}}$; i) $+\infty$

23. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+3}\right)^{3x}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{x^2}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim_{x\to0}(ax+1)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{x}$ i) $\lim_{x\to0}(\operatorname{sen}x+1)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$

Soluciones: a) e^3 ; b) 3 ; c) e^{-2} ; d) e^{-3} ; e) e^{-3} ; f) 1 ; g) e^a ; h) $e^{\frac{1}{a}}$; i) e

24. Calcular m y n sabiendo que $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+mx^2+nx+2}{x^3+2x^2-x-2}=-1$ (S: m = 2,n = 3)

25. Calcular k y h sabiendo que $\lim_{x\to\infty}\left(kx+h-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0$ (S: k = 1,h = 0)

26. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \quad ; \qquad g(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$$

Halla en el punto x = 7, los límites de las funciones:

f + g ; f – g ; 1/f ; g · f ; g – f ; f /g ; g / f

27. Calcula k para que $\lim\limits_{x\to 2} \frac{kx^2-4k}{x^2-x-2} = 1$.(S: k = 3/4)

28. Halla m con la condición de que $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+mx^2+4}{x^3-x^2-x-2}$ sea finito. ¿Cuánto vale dicho límite? (S: m = -3, 0)

29. Calcula m para que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4} = 6$ (S: m= -3)

30. Dada la función f(x) = $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3+bx^2-x+c}$, calcula b y c sabiendo que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{3}{8}$ (S: b = -7/3, c = 3)

31. Calcula k sabiendo que $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+kx-6}{x^2-4}$ es finito. Para dicho valor de k, calcular el límite.(S: k = 1, -1/4)

32. Halla a para que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+1}-x\right) = 0$. (S: a = 1)

33. Halla A para que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+Ax+1}-\sqrt{x^2-x+2}\right) = 8$.(S: A = 15)

34. Calcular a ≠ 0 para que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2-2x+6}{a^2x^2-6x+1} = \frac{1}{5}$ (S: a = 5)

35. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Representarlas gráficamente:

a) f(x) = $\begin{cases} 1-x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en x = 0

b) f(x) = $\begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1-2x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en x = 0, x = 1

c) f(x) = | x – 2 | en x = 2

d) f(x) = $|x| - \frac{x}{x-2}$ en x = 0, x = 2

36. Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx+n}{x^2+2x-3} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-10x^2+27x-18} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Calcular el valor de m y n para que exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(S: m = -6, n = 5)

5. Continuidad

37. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+7 & \text{si } 2\le x<3 \\ 5x+1 & \text{si } 3\le x<4 \\ \dfrac{x-5}{x+3} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en x = 2, x = 3 y x = 4.

38. Determinar razonadamente el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ d) $f(x) = |x-4|$

39. Encontrar los dominios de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-3)^3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ c) $f(x) = (x-1)(x+2)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ e) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2-5x+6}$ f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Solución: a) $\mathbb{R}-\{3\}$ b) $\mathbb{R}-\{\pm 3\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ e) $\mathbb{R}-\{2,3\}$ f) $\mathbb{R}$

40. Estudiar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) $y=f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)$ b) $y=f(x)=x\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^2$

41. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |2x+3|$ b) $f(x) = |x^2-4x+3|$ c) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

42. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x(x-3)}$

a) Estudiar el dominio de definición de f.

b) Determinar el dominio de continuidad.

c) Calcular los puntos de discontinuidad.

d) ¿Cómo definirías la función f para que fuese continua en x = 3?

43. Estudiar las discontinuidades de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x-5}{2+x}\right)$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{2+x}}$ c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{1-2\,\text{sen}\,x}$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2-9}{x-\sqrt{3}}$

44. Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \le 2 \\ x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x > -2 \\ 3x+9 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -x-2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

45. Estudiar la continuidad de la función f, indicando las discontinuidades que presente:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1-\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

46. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{-1}{2} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Determinar a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. (S: a = -3/2, b = 1)

47. La función $f(x) = \dfrac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ tiene una discontinuidad evitable en x = 2. Halla m y n y todas sus discontinuidades.

(S: m = 5, n = 0)

48. Hallar m y n para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ m \operatorname{sen} x + n & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{si } x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(S: m = -1/ 2, n = 1/2)

49. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x \le 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

a) Determinar a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Determinar a y b para que f presente una discontinuidad de salto en x = 0, siendo el salto 3, y una discontinuidad de salto en x = 1, siendo el salto 5.

(S: a = -19/ 2, b = 4)

EJERCICIOS PAU

JUNIO 2012 - ESPECÍFICA

Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ siendo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 3 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

JUNIO 2011 - GENERAL

1. Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ mx+n & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcule *m* y *n* para que f sea continua en todo su dominio.

2. Calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$

SEPTIEMBRE 2010 - GENERAL

1. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x\le 0 \\ 4-x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad en el punto *x* = 0.

c) Dibuje la gráfica de la función.

2. Calcule:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

SEPTIEMBRE 2010 - ESPECÍFICA

1. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x<2 \\ e^{x-2}+k^2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Determine el valor de *k* para que la función sea continua en el intervalo [0,4].

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$$

JUNIO 2010 - GENERAL

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\le 0 \\ 5\operatorname{sen}x-2\cos x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Determina el valor de b para que la función sea continua en x = 0

SEPT 2009

Dado $a\in\mathbb{R}$, se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

Determina los valores de a para los que la función es continua.

JUNIO 2007

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x-8}{2^{x+1}}$

JUNIO 2006

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & x\le -2 \\ 2x+4 & -2<x\le 0 \\ a\cos x & x>0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a

JUNIO 2005

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2-4 & \text{si } x<0 \\ -a(x-2)^2+4a & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

Determina los valores de a para que la función sea continua en x = 0.