

**JULIO 2012 – ESPECÍFICA**

1. Calcule  $a$  para que las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \qquad g(x) = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \qquad \text{tengan el mismo límite en el punto 0.}$$

SOLUCIÓN

Calculamos cada límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{1} = a$$

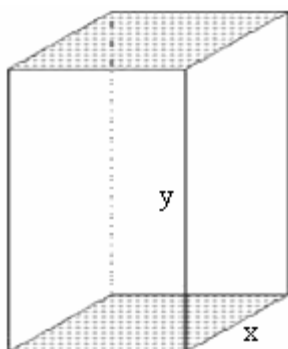
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} 2x}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x}{2} = -1$$

Para que los dos límites sean iguales debe verificarse que  $a = -1$ .

2. El perímetro de una cara lateral de un prisma recto de base cuadrada es de 60 centímetros. Calcule sus dimensiones de forma que su volumen sea máximo.

SOLUCIÓN



$$\text{Volumen} = \text{área base} \cdot \text{altura} \rightarrow V = x^2 \cdot y$$

$$\text{Perímetro de una cara lateral} = 60 \rightarrow 2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30$$

Expresamos una de las variables en función de la otra:  $y = 30 - x$

$$\text{La función a maximizar es: } V(x) = x^2 \cdot (30 - x) = 30x^2 - x^3$$

$$V'(x) = 60x - 3x^2$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 20x - x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 20$$

$$V''(x) = 60 - 6x \rightarrow V''(20) = 60 - 120 < 0$$

Descartamos el valor  $x = 0$  porque no se tendría prisma.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, si  $V''(20) < 0$ , la función presenta un máximo en  $x = 20$ .

Por tanto, las dimensiones del prisma son base cuadrada de 20 cm y altura 10 cm.

**JULIO 2012 – GENERAL**

1. Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4(e^x - 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Usando la definición de derivada, demuestra si la función  $f$  es derivable en  $x = 0$

SOLUCIÓN

La función es derivable en  $x = 0$  si se verifica que existe  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4(e^x - 1)}{x} - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(e^x - 1) - 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(e^x - x - 1)}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(e^x - 1)}{2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^x}{2} = 2.$$

**2. Calcule:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \infty - \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}$$

**JUNIO 2012 ESPECÍFICA**
**1. Se considera la curva:  $y = \frac{1}{1+x^2}$** 

- Halle el punto de la curva en el que la recta tangente a su gráfica tiene pendiente máxima.
- Calcule el valor de esa pendiente.

SOLUCIÓN

- La pendiente de la recta tangente a su gráfica en un punto  $x = a$  viene dada por la derivada de la función en  $x = a$  ( $f'(a)$ ).

$$\text{Si } f(x) = y = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

 Para determinar la pendiente máxima derivamos  $f'(x)$ 

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \rightarrow f''(x) = 0 \text{ si } 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

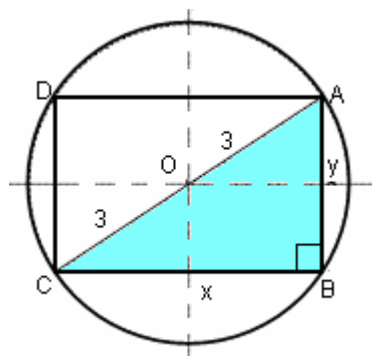
 Estudiamos el signo de  $f''$  para determinar el máximo:

$$f''(x) > 0 \text{ si } x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } x > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ es un máximo} \rightarrow \text{Punto: } \left( -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4} \right)$$

$$f''(x) < 0 \text{ si } -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- El valor de la pendiente es:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

**JUNIO 2012 – GENERAL**
**1. Halle el rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio 3.**
SOLUCIÓN

 Sean  $x$  e  $y$  las dimensiones del rectángulo.

 Área del rectángulo:  $A = x \cdot y$ 

 El triángulo ABC es rectángulo, sus lados miden  $x$ ,  $y$  y  $6$ , por tanto, se verifica que:

$$6^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

 Luego, el área es  $A(x) = x \cdot \sqrt{36 - x^2}$ 

Para que su área sea máxima su primera derivada tiene que ser cero:

$$A'(x) = \sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \text{ si } 36 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = +\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

 Descartada la solución negativa por ser  $x$  una longitud.

 Por tanto, el rectángulo de mayor área es el cuadrado de lado  $3\sqrt{2}$  unidades.

**2. Halle una función polinómica de tercer grado  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tal que tenga un mínimo en el punto (1,1) y un punto de inflexión en el punto (0,3).**
SOLUCIÓN

 La curva pasa por el punto (1,1), por tanto, se verifica que  $y(1) = 1$ :  $a + b + c + d = 1$  (1)

 La curva pasa por el punto (0,3), por tanto, se verifica que  $y(0) = 3$ :  $\boxed{d = 3}$ .

 La función tiene un mínimo en  $x = 1$ , por tanto, se verifica que  $y'(1) = 0$ :

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad (2)$$

 La función tiene un punto de inflexión en  $x = 0$ , por tanto, se verifica que  $y''(0) = 0$ :

$$y'' = 6ax + 2b \rightarrow y''(0) = b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0}$$

 Sustituyendo los valores de  $d$  y  $b$  en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + c + 3 = 1 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = -2 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1 \rightarrow c = -3$$

 Por tanto, la función es  $y = x^3 - 3x + 3$

**JULIO 2011 – ESPECÍFICA**

1. Dada la curva:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

- a) Obtenga sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.  
 b) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN

a) Para determinar los extremos relativos imponemos que  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow x = 2, x = 1$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, determinamos si son máximos o mínimos:

$$f''(x) = 2x - 3 \rightarrow f''(2) = 1 > 0 \rightarrow \text{La función tiene un mínimo en } x = 2$$

$$\rightarrow f''(1) = 1 < 0 \rightarrow \text{La función tiene un máximo en } x = 1$$

Para determinar los puntos de inflexión imponemos que  $f''(x) = 0$ :

$$f''(x) = 2x - 3 = 0 \text{ si } x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{La función tiene un punto de inflexión en } x = \frac{3}{2} \text{ ya que } f'''(x) = 2 \neq 0$$

b)  $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow x = 2, x = 1$

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

- o  $(-\infty, 1)$ :  $f'(x) > 0$  ya que para  $x = 0$   $f'(0) > 0 \rightarrow f$  creciente
- o  $(1, 2)$ :  $f'(x) < 0$  ya que para  $x = 1,5$   $f'(1,5) < 0 \rightarrow f$  decreciente
- o  $(2, +\infty)$ :  $f'(x) > 0$  ya que para  $x = 3$   $f'(3) > 0 \rightarrow f$  creciente

2. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x)^{\frac{1}{x}}$

SOLUCIÓN

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \sin(x-1)}{2 \ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1) + x \cos(x-1)}{2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1) + x^2 \cos(x-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1^\infty$

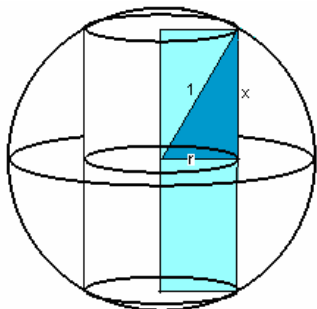
Aplicamos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)-1] \cdot g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)-1] \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + e^x}{1} = 1$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x)^{\frac{1}{x}} = e$

3. De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 metro, halle el volumen del que lo tenga máximo.

SOLUCIÓN



Volumen de un cilindro:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ , siendo

$r =$  radio del círculo base  $h =$  altura del cilindro

El cilindro está inscrito en una esfera de radio 1, por tanto, según el dibujo, se verifica:

$$1^2 = r^2 + x^2, \text{ siendo } 2x = h.$$

Si  $r = \sqrt{1-x^2}$  y  $2x = h$ , el volumen del cilindro es:

$$V(x) = \pi \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 \cdot 2x = \pi \cdot 2x(1-x^2) = \pi \cdot (2x - 2x^3)$$

Derivando:  $V'(x) = \pi \cdot (2 - 6x^2) \rightarrow V'(x) = 0: 2 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V''(x) = -12x \rightarrow V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  máximo

Por tanto, el cilindro de mayor volumen tiene altura  $h = 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  y radio  $r = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

#### JULIO 2011 – GENERAL

1. Sabiendo que el  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - m \operatorname{sen} x}{x^2}$  es finito, calcule el valor de  $m$  y halle el límite.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - m \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0} \quad \forall m \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - m \cos x}{2x} = \frac{3-m}{0}$$

Para que el límite sea finito, imponemos que  $3 - m = 0 \rightarrow m = 3$

Resolvemos el límite si  $m = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos x}{2x} = \frac{0}{0} \quad \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} x}{2} = 0$$

2. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Halle los extremos de la función

SOLUCIÓN

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para determinar los extremos imponemos que  $f'(x) = 0: 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$

Para determinar si los extremos son máximos o mínimos, aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$f''(0) = -2 < 0 \rightarrow f$  presenta un máximo en  $x = 0 \rightarrow (0,0)$  máximo

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0 \rightarrow f$  presenta un mínimo en  $x = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$  mínimo

**JUNIO 2011 – ESPECÍFICA**

1. Una ventana rectangular tiene un perímetro de 12 metros. Calcule las dimensiones de los lados del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.

SOLUCIÓN

Área ventana:  $A = x \cdot y$ , siendo  $x = \text{base}$ ,  $y = \text{altura}$

Perímetro rectángulo = 12  $\rightarrow 2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$

Área ventana:  $A(x) = x \cdot (6 - x) = 6x - x^2$

Para determinar el área máxima, imponemos que  $A'(x) = 0$ :

$$A'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$$

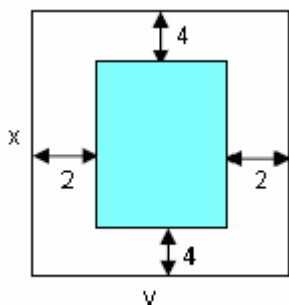
Comprobamos que  $x = 3$  es un máximo, para ello aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$$A''(x) = -2 < 0 \rightarrow x = 3 \text{ es un máximo.}$$

Las dimensiones del rectángulo son:  $x = 3 \rightarrow y = 6 - 3 = 3$ , es decir, un cuadrado de lado 3 m.

**JUNIO 2011 – GENERAL**

1. Se desea diseñar un libro de forma que cada página tenga  $600 \text{ cm}^2$  de área. Sabiendo que los márgenes superior e inferior son de 4cm cada uno y los laterales de 2cm, calcule las dimensiones de cada página para que el área impresa se máxima.

SOLUCIÓN


Alto de la página impresa:  $x - 8$

Ancho de la página impresa:  $y - 4$

Área impresa:  $A = (x - 8)(y - 4)$

Área página:  $x \cdot y = 600 \rightarrow y = \frac{600}{x}$

Área impresa:  $A(x) = (x - 8)\left(\frac{600}{x} - 4\right) = 632 - 4x - \frac{4800}{x}$

Para determinar el valor máximo, imponemos que  $A'(x) = 0$ :

$$A'(x) = -4 + \frac{4800}{x^2} = 0 \rightarrow A'(x) = \frac{4800 - 4x^2}{x^2} = 0 \rightarrow 1200 - x^2 = 0 \rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

$$A''(x) = -2 \cdot \frac{4800}{x^3} < 0 \quad \forall x > 0 \rightarrow A''(20\sqrt{3}) < 0 \rightarrow x = 20\sqrt{3} \text{ máximo, siendo } y = \frac{600}{20\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

2. Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\tan(x)}$$

$\tan(x)$  = función tangente de  $x$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\tan(x)} = \infty^0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \cdot \ln \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \cdot \ln \left( \frac{1}{x^2} \right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \cdot (-2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \ln x}{\cos x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (1) \ln \left( \frac{1}{x^2} \right) = \ln 1 - \ln x^2 = -\ln x^2 = -2 \ln x$$

$$\text{Aplicando L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2/x}{-\sin^2 x - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1} = 0$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\tan(x)} = e^0 = 1$$

## JUNIO 2010 ESPECÍFICA

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm. Halle las dimensiones de los catetos de forma que el área del triángulo sea máxima.

### SOLUCIÓN

Área del triángulo:  $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$  siendo  $x$  e  $y$  los catetos del triángulo rectángulo.

La hipotenusa mide 10 cm, por tanto, se verifica:  $10^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

La función área es  $A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ .

Para determinar el valor máximo, calculamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow 50 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$$

$$x = 5\sqrt{2} \text{ (descartamos el valor negativo)} \rightarrow y = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$$

Comprobamos que es un máximo de la función empleando el criterio de la segunda derivada:

$$A''(x) = \frac{-2x \cdot \sqrt{100 - x^2} - (50 - x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-2x \cdot (100 - x^2) + (50x - x^3)}{(100 - x^2) \cdot \sqrt{100 - x^2}} = \frac{x^3 - 150x}{(100 - x^2) \cdot \sqrt{100 - x^2}}$$

$$A''(5\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2} \cdot (50 - 150)}{50 \cdot \sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (-100)}{50 \cdot 5\sqrt{2}} = -2 < 0$$

Por tanto, el triángulo de área máxima es un triángulo rectángulo isósceles de catetos  $5\sqrt{2}$  cm.

2. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la función sea continua, tenga un máximo en  $x = -1$  y la tangente en  $x = -2$  sea paralela a la recta  $y = 2x$ .

### SOLUCIÓN

Imponemos que  $f$  sea continua en  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \cdot \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$f(0) = c \rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función tiene un máximo en  $x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln x & \text{si } x > 0 \\ 2ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \rightarrow f'(-1) = -2a + b = 0 \rightarrow b = 2a$$

$$\text{La tangente en } x = -2 \text{ es paralela a } y = 2x \rightarrow f'(-2) = 2 \rightarrow -4a + b = 2 \rightarrow -2a = 2 \rightarrow \boxed{a = -1} \rightarrow \boxed{b = -2}$$

**JUNIO 2010 GENERAL**


---

1. Se considera la curva:  $y = \frac{x^2}{1+x}$ . Halle, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

SOLUCIÓN

Para determinar los extremos relativos imponemos que  $f'(x) = 0$ :

$$y' = \frac{2x \cdot (1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$$

$$y'' = \frac{(2+2x) \cdot (1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2(1+x) \cdot (1+x)^2 - 2(2x+x^2) \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y''(0) = 2 > 0 \rightarrow (0,0) \text{ mínimo}$$

$$y''(-2) = -2 < 0 \rightarrow (-2,-4) \text{ máximo}$$

Para determinar los puntos de inflexión imponemos que  $f''(x) = 0$ , pero no se anula para ningún valor, por tanto, no existen.

**SEPTIEMBRE 2010 ESPECÍFICA**


---

1. Dada la función  $y = 5xe^{x-1}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halle, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

SOLUCIÓN

Para estudiar el crecimiento de la función, determinamos  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 5e^{x-1} + 5xe^{x-1} = 5e^{x-1}(1+x) = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x > -1 \rightarrow f \text{ creciente en } (-1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } x < -1 \rightarrow f \text{ decreciente en } (-\infty, -1)$$

Según el criterio de la primera derivada, la función tiene un máximo en  $\left(-1, -\frac{5}{e^2}\right)$ .

Para determinar los puntos de inflexión de la función, calculamos  $f''(x)$ :

$$f''(x) = 5e^{x-1}(1+x) + 5e^{x-1} = 5e^{x-1}(2+x) = 0 \text{ si } x = -2$$

Estudiando el signo de la segunda derivada:

$$\text{Si } x > -2 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f \text{ cóncava}$$

$$\text{Si } x < -2 \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f \text{ cónvexa}$$

Por tanto, la función tiene un punto de inflexión en  $\left(-2, -\frac{10}{e^3}\right)$