

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Abril 2011

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$.
2. Extremos relativos de f en el intervalo $[0, 1]$.
3. Representala gráficamente.
4. Calcular el área encerrada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$. Razona la respuesta.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1)^2 = 1$$
$$f(0) = 1$$

En $x = 0$ la función es continua.

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

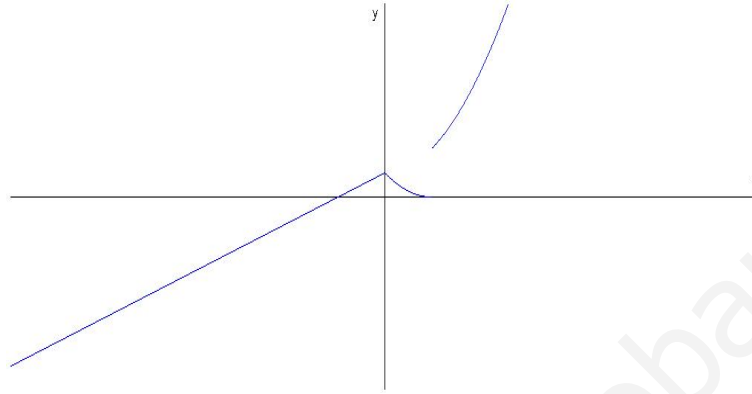
2. La función es $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$.

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \implies x = 1$$

$$f''(x) = 2 > 0 \implies f''(1) = 2 > 0$$

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 1)$. Decece en el intervalo $(1, 0)$ y crecería a partir de este punto, pero estos puntos ya estarían fuera del intervalo en cuestión.

3. Gráficamente:



4.

$$S = \int_2^3 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \frac{22}{3} u^2$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.
3. Representala gráficamente

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x} = \left[\frac{64}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 1}{x} = \left[\frac{64}{0^+} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x} - 2x \right) = 0$$

2. Monotonía y extremos:

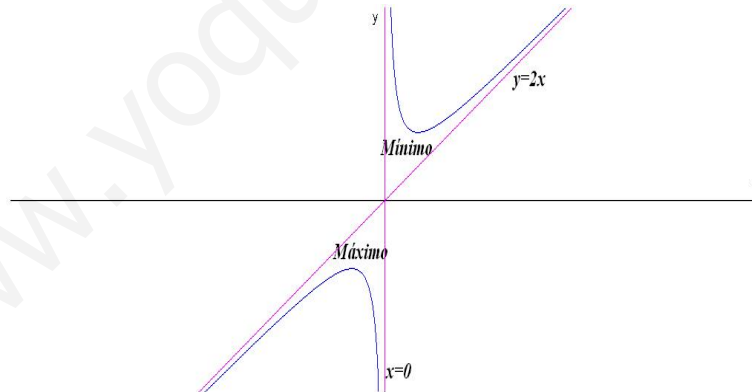
$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}, \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0 \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

La función tiene un máximo en el punto $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ y un mínimo en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

3. Gráficamente:



Problema 3 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + 3c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 2)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \implies 3c = 1 \\ f(1) = 2 \implies a - 2b + 3c = 2 \\ f'(1) = 0 \implies 2a - 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1/3 \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

www.yoquieroaprobar.es