Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 4

Programación Lineal

INDICE

1 INTRODUCCIÓN

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer a la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llego a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (el 12 de mayo de 1949 los soviéticos levantaron el bloqueo).

Otras aplicaciones de la programación lineal son:

- El problema de la dieta, que trata de determinar en qué cantidades hay que mezclar diferentes piensos para que un animal reciba la alimentación necesaria a un coste mínimo.
- El problema del transporte, que trata de organizar el reparto de cualquier tipo de mercancías con un coste mínimo de tiempo o de dinero.
- El problema de la ruta más corta, que ayuda a ordenar las etapas de un viaje con el propósito de minimizar el recorrido.

En este tema antes de pasar a explicar lo que es la programación lineal, explicaremos dos conceptos básicos para la posterior resolución de los problemas de programación lineal, que son: las inecuaciones de 1º grado con dos incógnitas y los sistemas de inecuaciones de primer grado con incógnitas .Nos centraremos en la resolución de problemas de programación lineal con dos variables.

2 INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS

Tienen la siguiente forma: $ax+by+c>0 \quad ax+by+c\geq 0 \quad ax+by+c<0 \quad ax+by+c\leq 0$

Se resuelven de la siguiente forma:

1. Dibujamos la recta $ax+by+c=0$.

- Si las desigualdades no son estrictas, es decir $ax+by+c>0 \quad ax+by+c<0$, la recta no forma parte de la solución y se dibuja discontinua

- Si las desigualdades son estrictas, es decir $ax+by+c\geq 0 \quad ax+by+c\leq 0$, la recta si forma parte de la solución y se dibuja continua

2. Seleccionamos un punto P(x,y) que no esté situado en la recta:

- Si el punto P verifica la inecuación, entonces todos los puntos del mismo semiplano también la verificarán y será la solución.
- Si el punto P no verifica la inecuación, entonces todos los puntos del mismo semiplano tampoco no la verificarán, por tanto, la solución será el otro semiplano.

Ejemplo: Resuelve: $2x+y\leq 2$

Solución

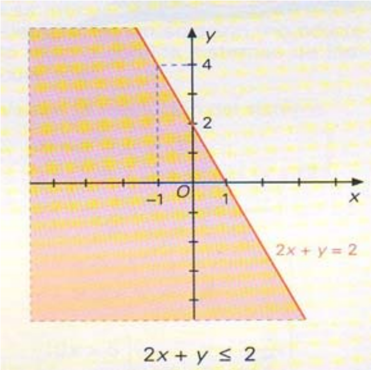
- Dibujamos la recta 2x + y = 2 . Damos dos valores a la x

x	0	1
y	2	0

- Las infinitas soluciones son los infinitos puntos de uno de los dos semiplanos que determina la recta. Para determinar cuál es, elegimos un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, si verifica la inecuación la solución es el semiplano al que pertenece el punto, si no lo cumple es el otro semiplano.

En nuestro ejemplo elegimos el origen (0 , 0)

$$2x+y\leq 2$$
$$(0,0)\Rightarrow 2\cdot 0+0\leq 2$$
$$0\leq 2 \quad \text{Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen}$$



3 SISTEMAS DE INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\boxed{\begin{cases} x+y\le 1 \\ x-y\ge 1 \end{cases}}$

Solución

Resolvemos cada inecuación por separado.

1º Inecuación $x+y\le 1$

- Dibujamos la recta $x+y=1$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	1	0

Elegimos el origen (0 , 0)

$x+y\le 1$

$(0,0)\Rightarrow 0+0\le 1$

$0\le 1$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

2º Inecuación $x-y\ge 1$

- Dibujamos la recta $x-y=1$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	-1	0

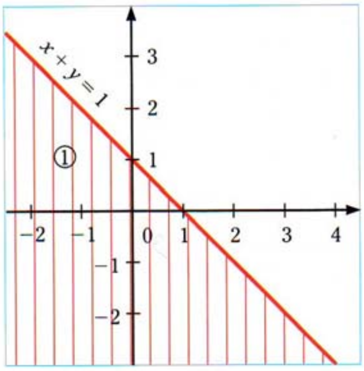
Elegimos el origen (0 , 0)

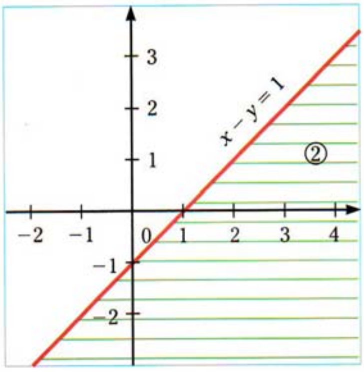
$x-y\ge 1$

$(0,0)\Rightarrow 0-0\ge 1$

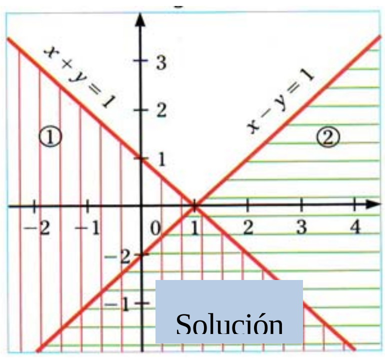
$0\ge 1$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no esta el origen

Gráficamente





Por lo tanto

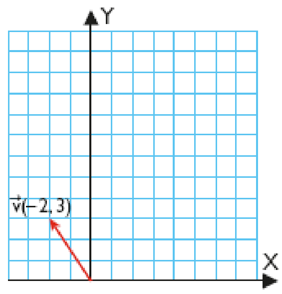


4 ¿QUÉ ES UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL?

Consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada *función objetivo*, estando las variables sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales

En este curso trataremos de resolver problemas de **programación lineal bidimensional**, es decir, maximizar o minimizar una función lineal con dos variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales. En este tipo de problemas la función objetivo es una función lineal con dos variables. Se representa por: $\boxed{f(x,y)=ax+by}$

- La región del plano determinada por las distintas desigualdades o restricciones, se llama *región factible.*
- La *solución óptima* es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo y se encuentra en la frontera de la región factible.
- El vector director de la función objetivo $f(x,y)=ax+by$ es el vector $\boxed{\vec{v}=(-b,a)}$. Las coordenadas del vector director de una función objetivo se pueden multiplicar o dividir por un mismo número distinto de cero, y su dirección no varía.
    - *Ejemplo* $f(x,y)=30x+20y \quad \Rightarrow \vec{v}=(-20,30) \Rightarrow \vec{v}=(-2,3)$



Métodos de resolución de un problema de programación lineal bidimensional

A) Método algebraico ó de los vértices: las soluciones obtenidas algebraicamente se encuentran en los vértices de la región factible.

Pasos:

1. Dibujar la región factible.
2. Determinar los vértices de la región factible.
3. Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.
4. El mínimo se alcanza en el vértice de menor valor y el máximo en el vértice de mayor valor.
5. Interpretación del resultado en cada problema.

B) Método gráfico o de las rectas de nivel: consiste en obtener gráficamente la solución.

Las rectas de nivel son las rectas paralelas al vector director de la función objetivo que pasan por los puntos de la región factible.

Pasos:

1. Dibujar la región factible.
2. Se representa la recta de beneficio nulo $f(x,y)=ax+by=0$ y se desplaza paralelamente a ella (rectas de nivel) hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo.

En las rectas que solo corten a la región factible en el vértice, analizamos el signo del coeficiente de la variable y en la función objetivo $f(x,y)=ax+by$.

- Si $\boxed{b>0}$ $\begin{cases} \text{El máximo se alcanza en el vértice cuya recta tenga mayor ordenada.} \\ \text{El mínimo se alcanza en el vértice cuya recta tenga menor ordenada.} \end{cases}$
- Si $\boxed{b<0}$ $\begin{cases} \text{El máximo se alcanza en el vértice cuya recta tenga menor ordenada.} \\ \text{El mínimo se alcanza en el vértice cuya recta tenga mayor ordenada.} \end{cases}$

Ejemplo 1:

En una confitería se dispone de 24 kg de polvorones y 15 kg de mantecados, que se envasan en dos tipos de cajas de la siguiente forma.

- Caja 1 : 200g de polvorones y 100g de mantecados. Precio: 4 euros.
- Caja 2 : 200g de polvorones y 300g de mantecados. Precio: 6 euros.

¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?

Solución

Veamos la solución por los métodos vistos anteriormente:

- Método algebraico ó de los vértices

La información del ejercicio la podemos organizar mediante una tabla:

	Nº de Cajas	Polvorones (g)	Mantecados (g)	Ingresos €
Caja 1	x	200	100	4
Caja 2	y	200	300	6
Total	x+y	≤ 24000	≤ 15000	4x+6y

Función Objetivo (Ingresos totales) $\boxed{F = 4x + 6y}$ (maximizar)

Restricciones: $\boxed{\left.\begin{array}{l} 200x + 200y \leq 24000 \\ 100x + 300y \leq 15000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Simplificando}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}}$

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{x + y \leq 120}$

x	0	120
y	120	0

- Dibujamos la recta x + y = 120 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$x + y \leq 120$

$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 120$

$0 \leq 120$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x+3y\leq 150}$

- Dibujamos la recta x + 3y = 150 . Damos dos valores a la x

x	0	150
y	50	0

- Elegimos el origen (0 , 0)

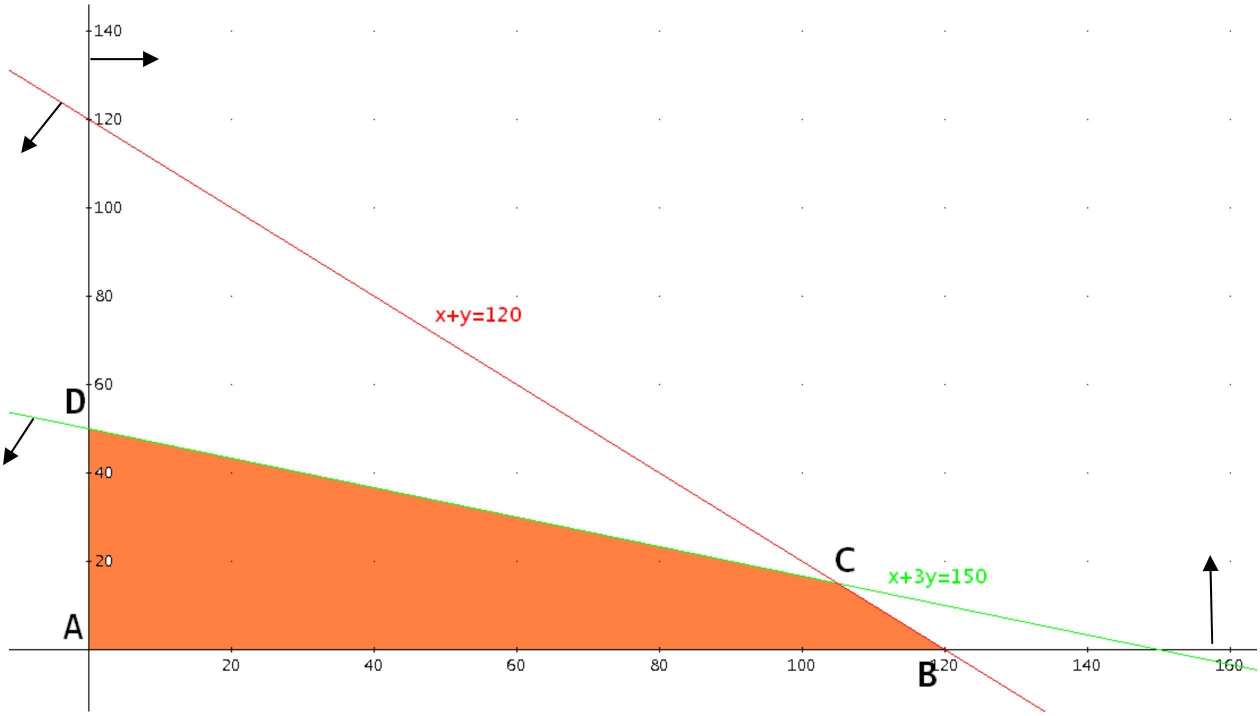
$x+3y\leq 150$

$(0,0)\Rightarrow 0+3\cdot 0\leq 150$

$0\leq 150$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x\geq 0, y\geq 0}$, indica que estamos en el primer cuadrante.

Por tanto la región factible es:



- Hallamos los vértices de la región factible:

$$A(0,0)$$
$$B(120,0)$$
$$C:\begin{cases}x+y=120\\x+3y=150\end{cases}\underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow}\begin{cases}x=105\\y=15\end{cases}\Rightarrow C(105,15)$$
$$D(0,50)$$

- Hallamos los valores de la función objetivo $F = 4x + 6y$ en cada uno de los vértices:

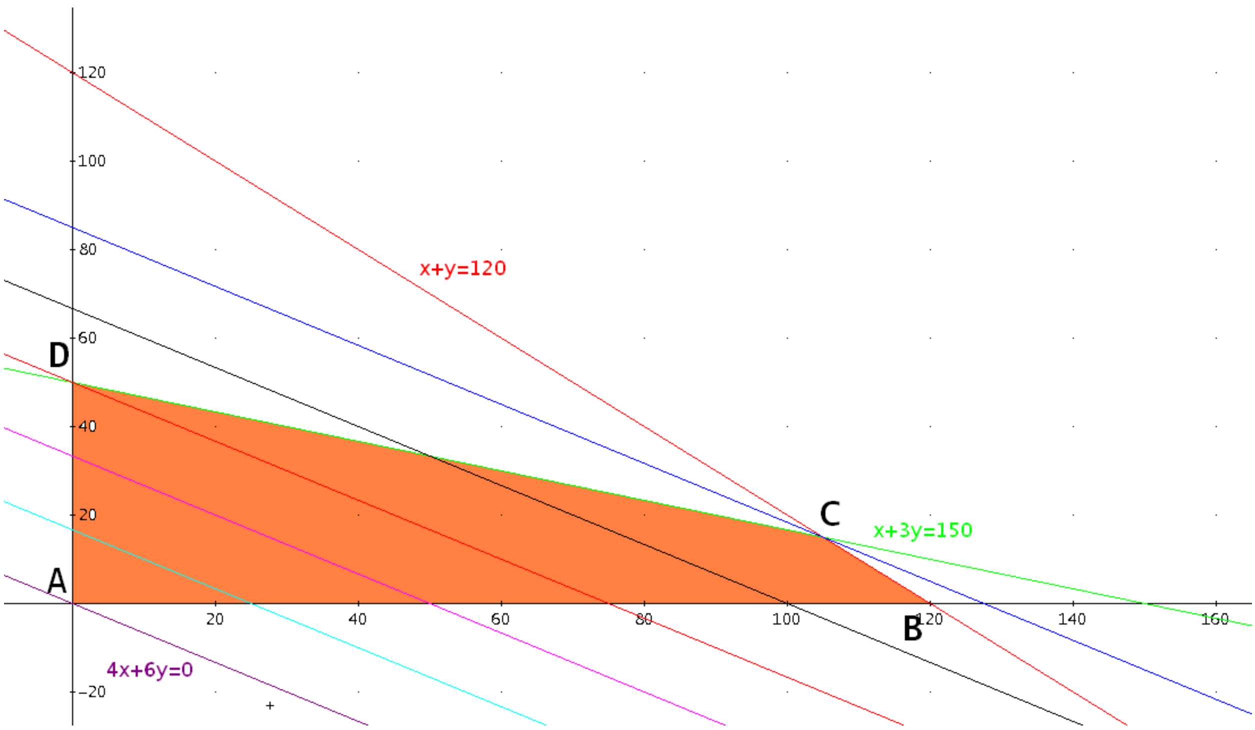
$$A(0,0) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Longrightarrow} F = 4\cdot 0 + 6\cdot 0 = 0_{\text{€}}$$
$$B(120,0) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Longrightarrow} F = 4\cdot 120 + 6\cdot 0 = 480_{\text{€}}$$
$$C(105,15) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Longrightarrow} F = 4\cdot 105 + 6\cdot 15 = 510_{\text{€}}$$
$$D(0,50) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Longrightarrow} F = 4\cdot 0 + 6\cdot 50 = 300_{\text{€}}$$

- La solución óptima corresponde al vértice en el que la función objetivo toma el valor máximo, que es el vértice C(105,15).

  Por tanto, hay que hacer 105 cajas del tipo 1 y 15 del tipo 2, siendo los ingresos máximos totales que se pueden obtener de su venta 510 euros.

  - Método gráfico o de las rectas de nivel:

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible.(paso realizado antes)
- Representamos la recta de nivel de beneficio nulo 4x+6y=0 y la desplazamos paralelamente a ella misma hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo, en este caso el máximo.

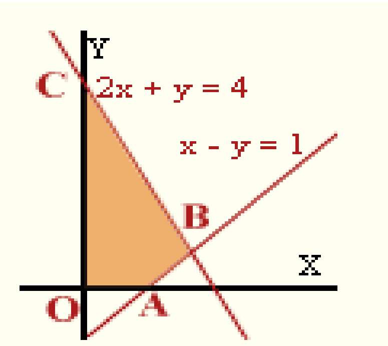


- Observando la gráfica, la recta de máximo nivel pasa por el punto C(105,15).
- Por tanto, hay que hacer 105 cajas del tipo 1 y 15 del tipo 2, siendo los ingresos máximos totales que se pueden obtener de su venta 510 euros.

Ejemplo 2:
Determinar el máximo de la función $z = 3x + 6y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución



$$\begin{cases} O(0,0) \Rightarrow z = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 \\ A(1,0) \Rightarrow z = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 3 \\ B(\frac{5}{3},\frac{2}{3}) \Rightarrow z = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5 + 4 = 9 \\ \boxed{C(0,4)} \Rightarrow z = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow \end{cases}$$ Se alcanza el máximo en este vértice, por tanto la función objetivo se hace máxima si $x = 0$ e $y = 4$

5 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON INFINITAS SOLUCIONES

Como hemos visto en el apartado anterior, si la región factible está acotada, entonces el máximo o el mínimo de la función objetivo se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Pero si el máximo o el mínimo se encuentran en dos vértices adyacentes de la región factible, entonces se alcanzará en los infinitos puntos del lado que los une. Gráficamente este lado es paralelo al vector director de la función objetivo.

Ejemplo: Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F = x + y$ (maximizar)

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{x + y \leq 5}$

- Dibujamos la recta x + y = 5 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	5
y	5	0

$x + y \leq 5$

$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 5$

$0 \leq 5$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x - y \leq 3}$

- Dibujamos la recta x -y = 3 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	3
y	-3	0

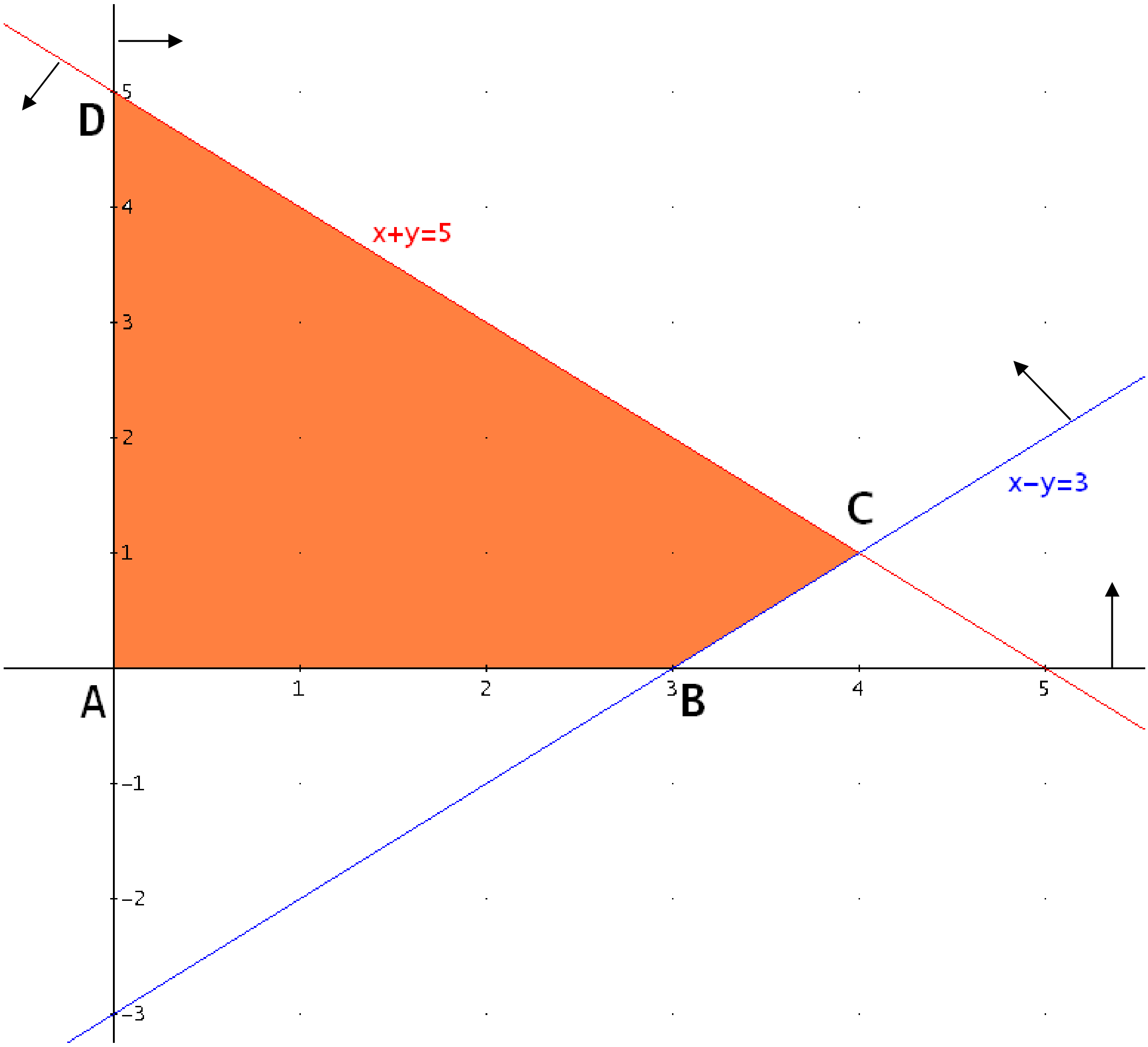
$x - y \leq 3$

$(0,0) \Rightarrow 0 - 0 \leq 3$

$0 \leq 3$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$, indica que estamos en el primer cuadrante.

Por tanto la región factible es:



- Hallamos los vértices de la región factible:

$$
\begin{array}{l}
A(0,0) \\
B(3,0) \\
C:\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(4,1) \\
D(0,5)
\end{array}
$$

- Hallamos los valores de la función objetivo $F = x + y$ en cada uno de los vértices:

$$
\begin{array}{l}
A(0,0) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F = 0+0 = 0 \\
B(3,0) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F = 3+0 = 3 \\
C(4,1) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F = 4+1 = 5 \\
D(0,5) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F = 0+5 = 5
\end{array}
$$

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices C y D y, por tanto, en todos los puntos del segmento CD. Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situados entre el vértice C y el D.

6 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL SIN SOLUCIÓN.

Un problema de programación lineal puede que no tenga solución, debido a una de estas dos razones:

a) Porque la región factible sea vacía.

b) Porque la región factible no éste acotada y no se alcance nunca en ella la solución óptima.

Ejemplo 1: Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para minimizar y maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F = 15x + 25y$

Restricciones: $\begin{cases} 2x + 6y \geq 12 \\ 7x + 3y \geq 21 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{2x + 6y \geq 12}$

x	0	6
y	2	0

- Dibujamos la recta 2x + 6y = 12 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$2x + 6y \geq 12$

$(0,0) \Rightarrow 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \geq 12$

$0 \geq 12$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

$\boxed{7x + 3y \geq 21}$

x	0	3
y	7	0

- Dibujamos la recta 7x +3y =21 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

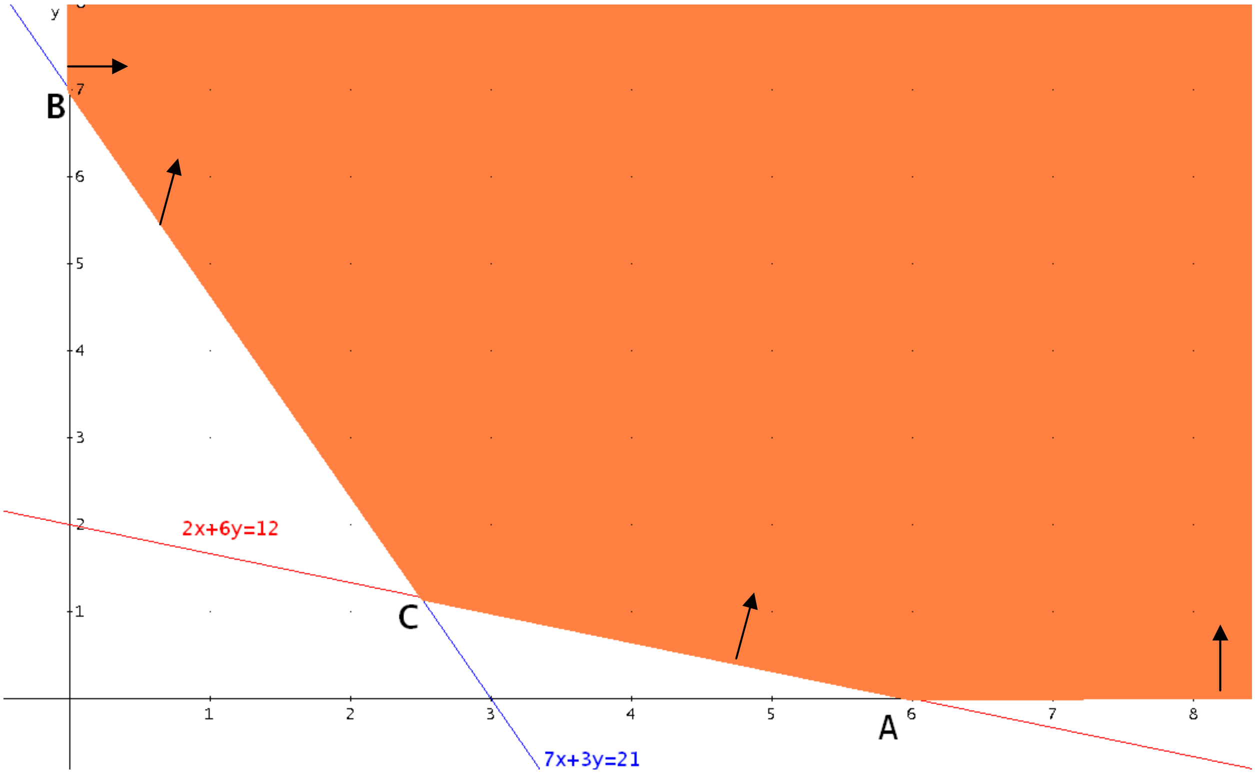
$7x + 3y \geq 21$

$(0,0) \Rightarrow 7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 21$

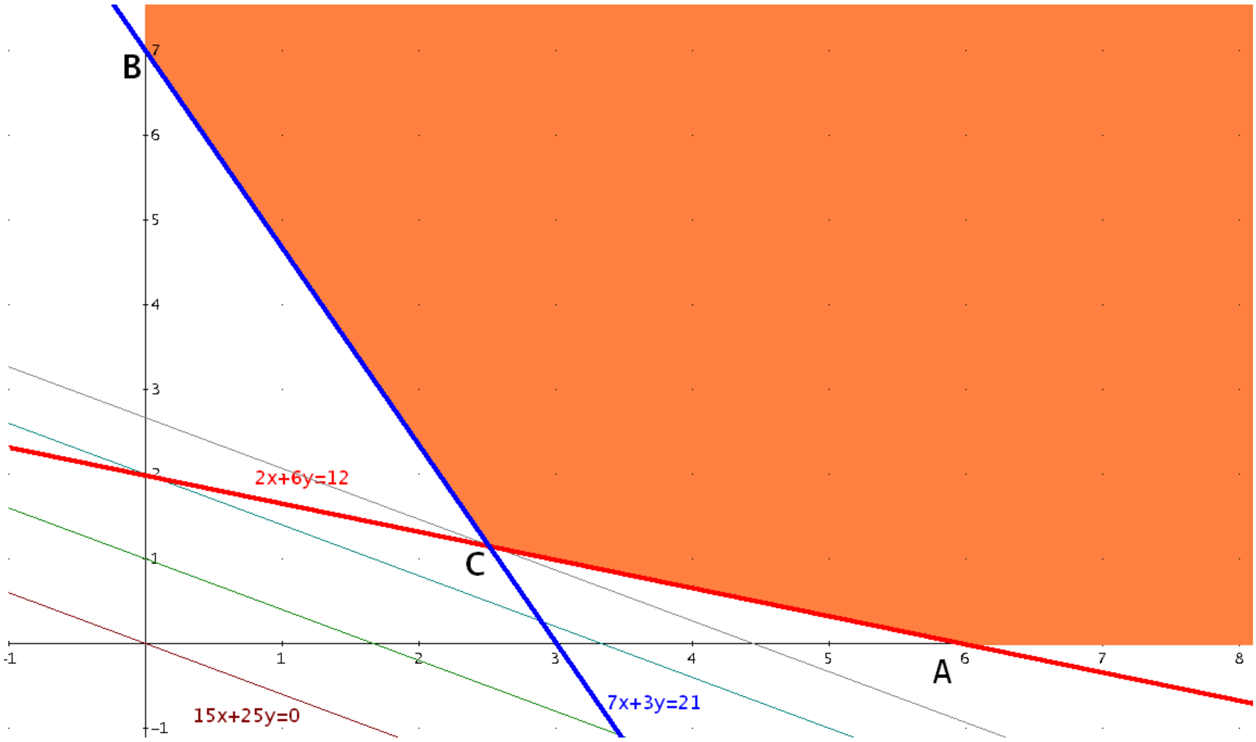
$0 \geq 21$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$, indica que estamos en el <u>primer cuadrante</u>.

Por tanto la región factible es:



- Representamos la recta de nivel de beneficio nulo 15x+25y=0 y la desplazamos paralelamente a ella misma hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo,
- Observando la gráfica, la recta de mínimo nivel pasa por el punto C.



Calculamos el punto C : $C:\begin{cases} 2x+6y=12 \\ 7x+3y=21 \end{cases} \underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow C(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{6})$

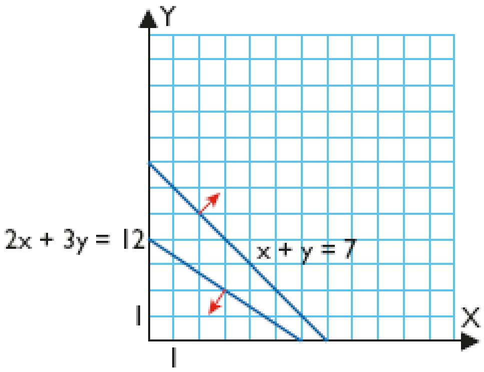
- Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, nunca se alcanza en ningún punto de ella el valor máximo.

Ejemplo 2: Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$\begin{cases} x+y\geq 7 \\ 2x+3y\leq 12 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$, minimiza en dicho recinto el valor de la función $f(x,y)=5x+2y$

Solución

Se representa la región factible, ver imagen, y se observa que la región factible está vacía, es decir, no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.



7 EJERCICIOS

1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x-y\le 1 \\ 5x+3y\le 15 \end{cases}$.

2. Representa el recinto formado por las siguientes restricciones: $\begin{cases} y-x\le 2 \\ x+5y\ge 10 \\ x+2y\le 16 \\ 2x+y\le 20 \end{cases}$

3. Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F=3x+6y$

Restricciones: $\begin{cases} x+y\le 10 \\ 0\le x\le 6 \\ x\ge y \\ y\ge 2 \end{cases}$

4. Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que le caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

5. Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 € y a no fumadores al precio de 60 €. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?

6. Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg. Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

7. Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas. Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por 15 € cada uno.

8. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

9. Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T1 y T2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

Si se venden las tartas T1 a 10 €, y las tartas T2 a 23 € ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

10. En un taller de carpintería se fabrican mesas de cocina de formica y de madera. Las de formica se venden a 210€ y las de madera a 280€. La maquinaria del taller condiciona la producción, por lo que no se pueden fabricar al día más de 40 mesas de formica, ni más de 30 de madera, ni tampoco más de 50 mesas en total. Si se vende todo lo que se fabrica. ¿Cuántas mesas de cada tipo les convendría fabricar para ingresar por su venta la máxima cantidad de dinero posible?