PROBLEMAS RESUELTOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 0,4 € por kilo de la mercancía A y 0,3 € por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

El cuadro siguiente resume las condiciones del enunciado. En primer lugar, elegimos como variables x e y, representando las cantidades que se van a transportar de cada mercancía, en toneladas. Las restricciones son: que el total transportado es, como máximo, 12 Tm: $x+y \leq 12$; que de A hay que transportar, al menos, 5 Tm: $x \geq 5$; que de B hay que transportar, al menos, la mitad de lo que se transporte de A: $y \geq x/2$. Por último, los ingresos, que hay que maximizar, son 0,4 por kilo de A más 0,3 por kilo de B. O, lo que es los mismo, 400€ por Tm de A y 300€ por Tm de B, es decir, un total de $400x+300y$. Para evitar decimales, en lugar de trabajar en euros, lo haremos en centenas de euro. Por tanto:

	Cantidad transportada (Tm)	Límites	Facturación (100€)
A	x	$x \geq 5$	$4x$
B	y	$y \geq x/2$	$3y$
TOTAL	$x+y \leq 12$		$4x+3y$

Por último, la cantidad transportada no puede ser negativa para ninguno de los dos tipos de mercancía: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Luego el problema de programación lineal es:

Función Objetivo: $f(x,y) = 4x+3y$ MAXIMIZAR

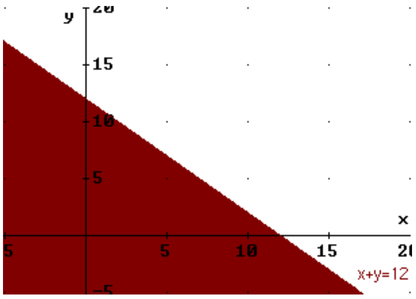
Restricciones: $x+y \leq 12$

$x \geq 5$

$y \geq x/2$

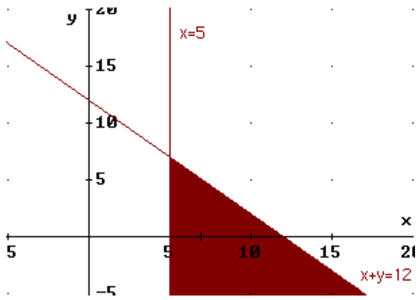
$x \geq 0, \quad y \geq 0$

Dibujamos la región factible, determinada por las restricciones.

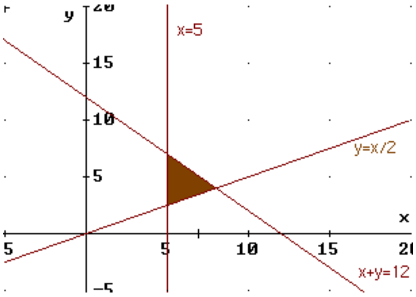


$x+y = 12$ es una recta. Para dibujarla, basta elegir dos puntos de la misma.

Esta recta divide el plano en dos semiplanos. Uno de ellos es el que verifica $x+y \leq 12$. Para averiguarlo, tomamos un punto cualquiera, del que sepamos seguro si está por encima o por debajo de la recta, y sustituimos en $x+y \leq 12$. Por ejemplo (0, 0), que está debajo de la recta, verifica: $0+0 \leq 12$. Por tanto, la zona $x+y \leq 12$ es la que queda bajo la recta, y que se ha destacado en el gráfico.



$x=5$ es una recta vertical. Como el punto (0,0), al sustituir en la desigualdad $x \geq 5$ no la verifica (quedaría $0 \geq 5$, que no es cierto), el semiplano que nos vale es el de la derecha. Combinándolo con lo anterior, la zona coloreada es la que verifica las dos restricciones a la vez.



Representamos la recta $y = x/2$. Esta vez no podemos trabajar con (0, 0), porque es un punto de la recta. Escogemos, por ejemplo (10, 0), que queda por debajo y sustituimos en $y \geq x/2$: $0 \geq 10/2 \Leftrightarrow 0 \geq 5$, que no es cierto. Luego el semiplano que vale es el otro, el que queda por encima. La zona coloreada verifica las tres restricciones simultáneamente.

Las restricciones restantes, $x \geq 0$, $y \geq 0$ nos remiten a trabajar sólo en el primer cuadrante. Como la región que tenemos hasta ahora está plenamente incluida en el primer cuadrante, ya está totalmente delimitada en el gráfico anterior.

De entre todos los puntos de la *región factible*, hemos de escoger aquél que maximiza la *función objetivo* $f(x,y) = 4x+3y$. Para cada valor de x y de y la función objetivo toma un valor. Por ejemplo (sin considerar si los puntos están o no en la región factible):

Para (0, 0): $4 \cdot 0+3 \cdot 0 = 0$

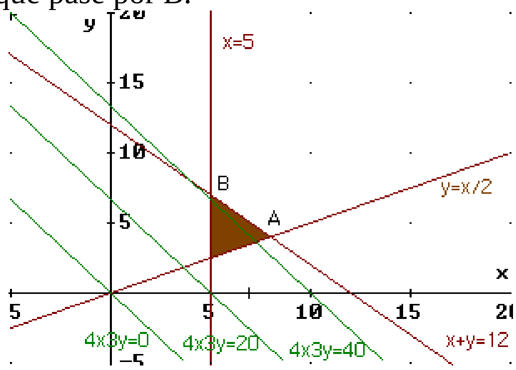
Para (2, 5): $4 \cdot 2+3 \cdot 5 = 23$

Etc.

Queremos, entonces, el punto (x, y) de la región factible que haga c, en $4x+3y = c$, lo mayor posible (eso es lo que hace que los ingresos sean lo mayor posible). Dicho punto pertenece a la recta de ecuación $4x+3y = c$. Todas estas rectas son paralelas entre sí (ver el gráfico siguiente). Y cuánto más alta es la recta, mayor es c, es decir, mayores son los ingresos. Luego nos interesa la recta más alta posible.

En cuanto a esto, es **importante** tener en cuenta que **si en la función objetivo *y* aparece con signo negativo**, la función objetivo ofrece resultados ***mayores* cuanto más baja está la recta**.

En nuestro problema, según el gráfico, la recta más alta posible que toca algún punto de la región factible será la que pase por A o, quizás, si el gráfico no estuviera muy afinado, podría ser la que pase por B:



Para quitarnos la duda, comprobamos ambos puntos. Para empezar, calculamos las coordenadas de ambos.

A es la intersección de $x+y = 12$ con $y = x/2$ (que equivale, despejando, a $x-2y = 0$). Por tanto, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo lo que hemos despejado en la primera ecuación ($x = 2y$) en la segunda:

$$2y+y = 12 \quad\Rightarrow\quad 3y = 12 \quad\Rightarrow\quad y = 4$$

Sustituyendo en $x = 2y \quad\Rightarrow\quad x = 8 \quad\Rightarrow\quad A(8, 4)$

B es la intersección de $x+y = 12$ con $x = 5$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 5$ en la segunda ecuación: $5+y = 12 \quad\Rightarrow\quad y = 7 \quad\Rightarrow\quad B(5, 7)$

Por tanto, los valores de la función objetivo en cada uno de estos dos puntos, son:

$f(A) = 4\cdot8+3\cdot4 = 32+12 = 44$

$f(B) = 4\cdot5+3\cdot7 = 20+21 = 41$

Luego lo máximo que se puede conseguir con puntos de la región factible (la que verifica las restricciones) es 44, en A.

Es decir, que la solución óptima está en 8 Tm de la mercancía A y 4 Tm de B, con lo que se consiguen unos ingresos de 44 centenares de €, o sea, 4.400€.

2) (*Junio 2.001, modificado a euros*) Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 1,5€ y 1 € el metro respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo A y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo B. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

Volcamos los datos del enunciado en el siguiente cuadro:

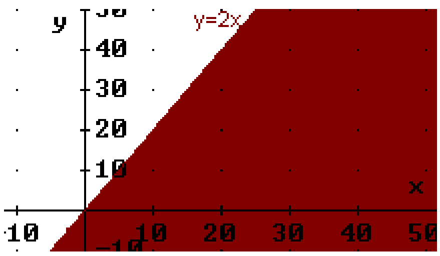
	Cantidad fabricada (Hm)	Plástico (Kg)	Cobre (Kg)	Precio venta (Decenas de €)
A	x	$16x$	$4x$	$15x$
B	y	$6y$	$12y$	$10y$
TOTALES	$y\leq 2x$	$16x+6y\leq 252$	$4x+12y\leq 168$	$15x+10y$

Es decir, vamos a fabricar x Hm de A e y Hm de B. Cada Hm de A se vende a 150€ o, lo que es lo mismo, a 15 decenas de €; cada Hm de B, a 100€, equivalente a 10 decenas de € (usamos esta medida para simplificar las cantidades con las que trabajamos). Así, la venta, que es lo que hay que maximizar (o sea, la *función objetivo*) es:

$$f(x, y) = 15x+10y \quad \text{(Maximizar)}$$

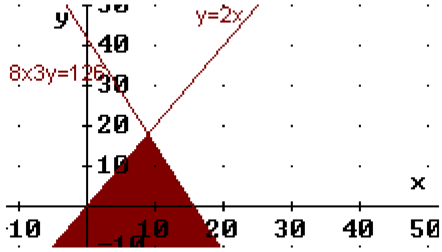
Las restricciones son:

- La cantidad fabricada de A debe ser menor o igual que el doble de la de B: $y\leq 2x$
- La cantidad de plástico disponible es de 252 Kg: $16x+6y\leq 252$
- La cantidad de cobre disponible es de 168 Kg: $4x+12y\leq 168$
- No se pueden fabricar cantidades negativas: $x\geq 0$, $y\geq 0$

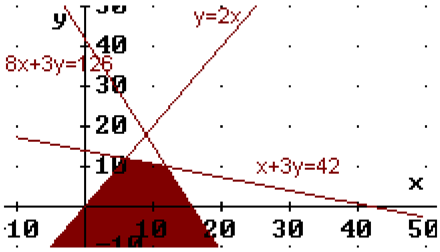


Dibujemos la región factible, es decir, los puntos (x, y) que verifican todas las restricciones.

Dibujamos $y=2x$. Los puntos que verifican $y\leq 2x$ son los que tienen una y menor que los de la recta, es decir, los que quedan bajo la misma. Podemos también comprobarlo tomando un punto cualquiera bajo la misma y viendo que verifica la desigualdad. Por ejemplo, (40, 0): $0 \leq 2 \cdot 40$

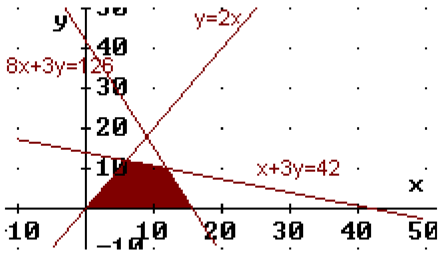


La recta $16x+6y=252$ equivale a (simplificando entre 2) $8x+3y=126$. De los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, la desigualdad $16x+6y \leq 252$ la verifican los puntos que quedan por debajo (puede comprobarse sustituyendo (0, 0) en la desigualdad. Combinando este resultado con el anterior, la zona coloreada verifica las dos desigualdades a la vez.

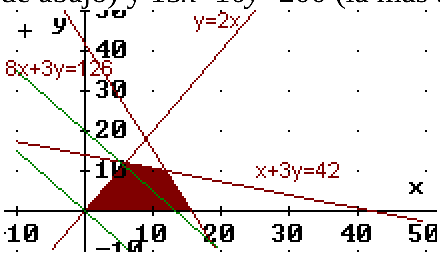


La recta $4x+12y=168$ equivale a $x+3y=42$, simplificando entre 4. La zona válida para $4x+12y \leq 168$ es la que queda bajo la recta. La zona combinada es la coloreada.

Por último, las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ limitan la zona a puntos del primer cuadrante, por lo que la región factible final es la que está coloreada junto a estas líneas.



Buscamos el punto (x, y) de la región factible tal que $15x+10y$ da el valor c máximo: $15x+10y = c$. Esto es una recta. Dará el valor mayor posible, cuanto más alta esté (porque y lleva coeficiente positivo: si no, sería al revés); en el gráfico están dibujadas $15x+10y=0$ (la de abajo) y $15x+10y=200$ (la más alta):



A la vista del gráfico, eso va a suceder en el punto donde se cortan $8x+3y=126$ y $x+3y=42$:

$$\begin{cases} 8x+3y=126 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad F_1 - F_2: \begin{cases} 7x \quad\quad = 84 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{84}{7} = 12 \quad \Rightarrow$$

$$12 + 3y = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 3y = 42–12 \;\; \Rightarrow \;\; 3y = 30 \;\; \Rightarrow \;\; y = 10$$

Dicho punto es, entonces, (12, 10). (Nota: Si tuviésemos dudas, calcularíamos también las coordenadas del punto de intersección de $x+3y=42$ con $y=2x$, y las del punto intersección de $8x+3y=126$ con el eje OX, y compararíamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos). El resultado es, entonces:

$$f(12, 10) = 15 \cdot 12 + 10 \cdot 10 = 180+100 = 280 \text{ decenas de €}$$

En definitiva, la solución óptima consiste en fabricar 12 Hm de *A* y 10 Hm de *B*, con lo que la venta ascenderá a 2.800€.

3) *(Propuesta para Selectividad 2.005)* Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

	Cantidad fabricada	Horas de trabajo	Máximo semanal	Beneficio (Decenas de €)
Fijos	x	$4x$	$x\leq 10$	$10x$
Portátiles	y	$10y$	$y\leq 15$	$15y$
TOTALES		$4x+10y\leq 160$		$10x+15y$

Esquematizado el enunciado en el cuadro anterior, el problema de Programación Lineal consiste en:

Función Objetivo: $f(x, y) = 10x+15y$ MAXIMIZAR

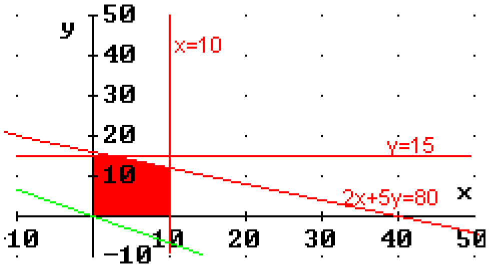
Restricciones: $4x+10y\leq 160 \Leftrightarrow 2x+5y\leq 80$

$x\leq 10$

$y\leq 15$

$x\geq 0$, $y\geq 0$ (no se puede fabricar una cantidad negativa)

Dibujamos la región factible. Los puntos que verifican $2x+5y\leq 80$ quedan bajo la recta (si despejásemos, sería $y\leq(-2x+80)/5$, es decir, valores con y menores que los puntos de la recta, que tendrían $y=(-2x+80)/5$; también puede verse sustituyendo un punto de uno de los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, y viendo si el punto elegido es del semiplano que verifica la inecuación). Los que cumplen que $x\leq 10$ quedan a la izquierda de la recta $x=10$. Los de $y\leq 15$ están bajo la recta horizontal $y=15$. $x\geq 0$, $y\geq 0$ nos restringe al primer cuadrante. Por tanto, la región factible es:



Hemos dibujado, pasando por (0, 0), la recta $10x+15y=0$. La solución será una recta $10x+15y=c$, es decir, paralela a la dibujada, con c lo mayor posible (porque estamos maximizando). Esto nos obliga a dibujarla lo más alta posible tocando a puntos de la región factible (porque el coeficiente de y en la función objetivo es positivo; si fuese negativo, sería la recta más baja posible). Luego los últimos puntos que tocará serán (dependiendo de la precisión del gráfico dibujado) o el vértice intersección de $y=15$ con $2x+5y=80$, o la intersección de esta última recta con $x=10$, o incluso todo el segmento que los une. Calculemos ambos, veamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos, para ver dónde es mayor.

$\begin{cases} y = 15 \\ 2x + 5y = 80 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación (que ya nos da el valor de y) en la segunda: $2x + 5\cdot15 = 80$ $\Rightarrow$ $2x + 75 = 80$ $\Rightarrow$ $2x = 80–75$ $\Rightarrow$ $2x = 5$ $\Rightarrow$ $x=5/2$

Luego el primer punto es (5/2, 15)

$\begin{cases} x = 10 \\ 2x + 5y = 80 \end{cases}$ $\Rightarrow$ De la misma forma: $2\cdot10 + 5y = 80$ $\Rightarrow$ $5y = 80–20$ $\Rightarrow$ $y=60/5=12$

Por lo que el segundo punto es (10, 12)

$f(5/2, 15) = 10\cdot\frac{5}{2} + 15\cdot15 = 25+225 = 250$

$f(10, 12) = 10\cdot10 + 15\cdot12 = 100+180 = 280$

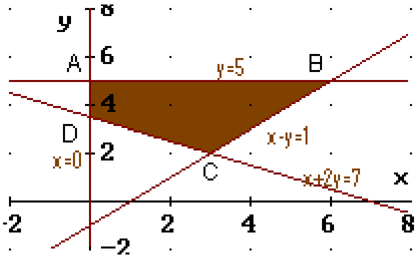
Luego el beneficio máximo se consigue fabricando 10 fijos y 12 portátiles, lo que reporta un beneficio de 2.800€.

Téngase en cuenta que si la solución hubiera sido en (5/2, 15) no sería válida, porque no puede fabricarse un número decimal de ordenadores. Habría entonces que dibujar los puntos de la región factible correspondientes a valores de x e y sin decimales, y buscar el máximo sólo entre ellos.

4) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x – y \le 1; \;\; x + 2y \ge 7; \;\; x \ge 0; \;\; y \le 5.$$

Como en problemas similares anteriores, dibujamos las rectas y decidimos cuál de los dos semiplanos resultantes corresponde a la inecuación correspondiente. El área final es la siguiente:



Puede presentar algún problema razonar con estas inecuaciones para decidir la zona. Por ejemplo la primera inecuación $x – y \le 1$ equivale a: $x \le 1+y$ $\Leftrightarrow$ $x – 1 \le y$. Es decir:

$$y \ge x–1$$

Por tanto, la zona es la que queda *por arriba* de la recta.

Lo mismo sucede con la inecuación $x+2y \ge 7$, que despejando y nos queda, también, que es el semiplano que está *por encima* de la recta.

Si la decisión la hubiésemos tomado eligiendo un punto cualquiera del plano que no esté en la recta y viendo si verifica, o no, la inecuación, no hubiésemos tenido problemas.

b) Determine los vértices de este recinto.

A $\begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ A(0, 5)

B$\begin{cases} y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: x–5 = 1 $\Rightarrow$ x=6 $\Rightarrow$ B(6, 5)

C$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix}\cdot 2: \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ x+2y=7 \end{cases}$

Sumando: 3x = 9 $\Rightarrow$ x = 3

Sustituyendo en la primera ecuación original: 3–y = 1 $\Rightarrow$ 3–1 = y $\Rightarrow$ y = 2

Luego C(3, 2)

D$\begin{cases} x=0 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: 2y = 7 $\Rightarrow$ $y=\frac{7}{2}$

Luego D(0, 7/2)

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo siguiente?

$$F(x, y) = 2x + 4y - 5$$

Como tenemos los cuatro vértices, y los extremos de una región factible están en los vértices de la misma o en los segmentos que unen los vértices, siempre y cuando cualquier punto de la región factible pueda ser solución, en lugar de recurrir a dibujar la recta $2x + 4y - 5 = c$ $\Leftrightarrow$ $2x + 4y = c'$ procedemos a calcular el valor de la función objetivo F en cada vértice y comparamos los resultados:

$F(\text{A}) = F(0, 5) = 2\cdot 0 + 4\cdot 5 - 5 = 15$

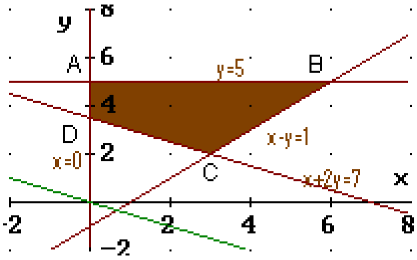
$F(\text{B}) = F(6, 5) = 2\cdot 6 + 4\cdot 5 - 5 = 27$

$F(\text{C}) = F(3, 2) = 2\cdot 3 + 4\cdot 2 - 5 = 9$

$F(\text{D}) = F(0, \frac{7}{2}) = 2\cdot 0 + 4\cdot \frac{7}{2} - 5 = 9$

Por tanto, el máximo valor de la función objetivo es 27, y se alcanza en B(6, 5). El mínimo vale 9, y es alcanzado en dos vértices: C y D. Por tanto, cualquier punto del segmento CD es solución si se intenta minimizar la función objetivo.

En efecto, si dibujamos $2x+4y = 0$ observamos que es paralela a la recta que une C con D, lo que explica el resultado obtenido:



5) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.

El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos, pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.
¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo.
Para elegir las incógnitas, consideramos que lo que nos piden es el número de contenedores de cada tipo que debe comprar: A ó B. Llevamos la información del enunciado a la tabla siguiente, añadiendo que no podemos comprar un número negativo de contenedores de ninguno de los dos tipos, resultando:

Tipos de contenedores	Nº de contenedores a comprar	Gambas	Langostinos
A	x	$2x$	$3x$
B	y	y	$5y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $x + y \leq 50$	$2x + y \geq 50$	$3x + 5y \geq 180$

Función Objetivo: $F(x, y) = 350x + 550y$ (minimizar)
Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 50$; $2x + y \geq 50$; $3x + 5y \geq 180$.

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x + y = 50$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 50 \\ \hline y & 50 & 0 \end{array}$ $x + y \leq 50 \Rightarrow y \leq 50 - x$ Semiplano inferior
- $2x + y = 50$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 25 \\ \hline y & 50 & 0 \end{array}$ $2x + y \geq 50 \Rightarrow y \geq 50 - 2x$ Semiplano superior
- $3x + y = 180$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 60 \\ \hline y & 180 & 0 \end{array}$ $3x + y \geq 180 \Rightarrow y \geq 180 - 3x$ Semiplano superior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
El vértice $\boxed{A(0,\ 50)}$ ha surgido en una de las tablas de valores. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

$$B: \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 180 \\ x + y = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 180 \\ -3x - 3y = -150 \end{array}\right\} \\ \hline 2y = 30 \Rightarrow y = 15 \end{array} \Rightarrow x + 15 = 50 \Rightarrow x = 35$$

Por tanto: $\boxed{B(35,\ 50)}$.

$$C:\ \left.\begin{array}{r} 3x+5y=180 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} 3x+5y=180 & \\ -10x-5y=-250 & \\ \hline -7x \qquad = -70 \Rightarrow x=10 & \end{array} \qquad \Rightarrow 20 + y = 50 \Rightarrow\ y = 30$$

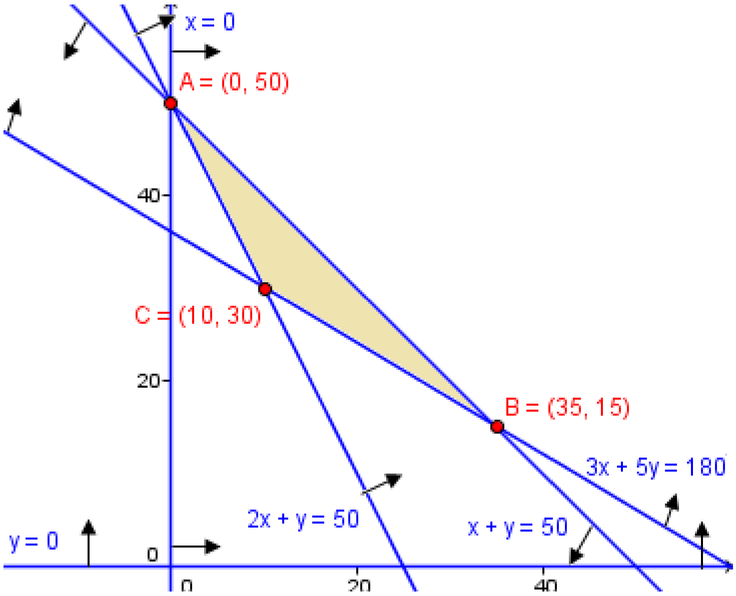
Por tanto: $\boxed{C(10,\ 30)}$.

Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0,\ 50) = 350·0 + 550·50 = 27500$

$F(B) = F(35,\ 15) = 350·35 + 550·15 = 20500$

$F(C) = F(10,\ 30) = 350·10 + 550·30 = 20000$



De donde deducimos que el menor coste que cumple todas las condiciones se consigue comprando 10 contenedores al mayorista *A* y 30 al *B*, siendo dicho coste de 20000€.

6) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30€ y el de un pantalón es de 50€.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

Para elegir las incógnitas, consideramos que lo que nos piden es el número de camisas y de pantalones a confeccionar: *C* ó *P*. Llevamos la información del enunciado a la tabla siguiente, añadiendo que no podemos confeccionar un número negativo de ninguno de los dos géneros, resultando:

Tipos de género	Nº de unidades a confeccionar	Tela (m)	Botones (unidades)	Cremalleras (unidades)
C	x	$2x$	$5x$	
P	y	$3y$	$2y$	y
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$2x + 3y \leq 1050$	$5x + 2y \leq 1250$	$y \leq 300$

Función Objetivo: $F(x, y) = 30x + 50y$ (maximizar)

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 3y \leq 1050$; $5x + 2y \leq 1250$; $y \leq 300$.

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando *y* en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $2x + 3y = 1050$:

x	0	525
y	350	0

$2x + 3y \leq 1050 \Rightarrow y \leq (1050 - 2x)/3$ Semiplano inferior

- $5x + 2y = 1250$:

x	0	250
y	625	0

$5x + 2y \leq 1250 \Rightarrow y \leq (1250 - 5x)/2$ Semiplano inferior

- $y = 300$: Recta horizontal. $y \leq 300 \Rightarrow$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

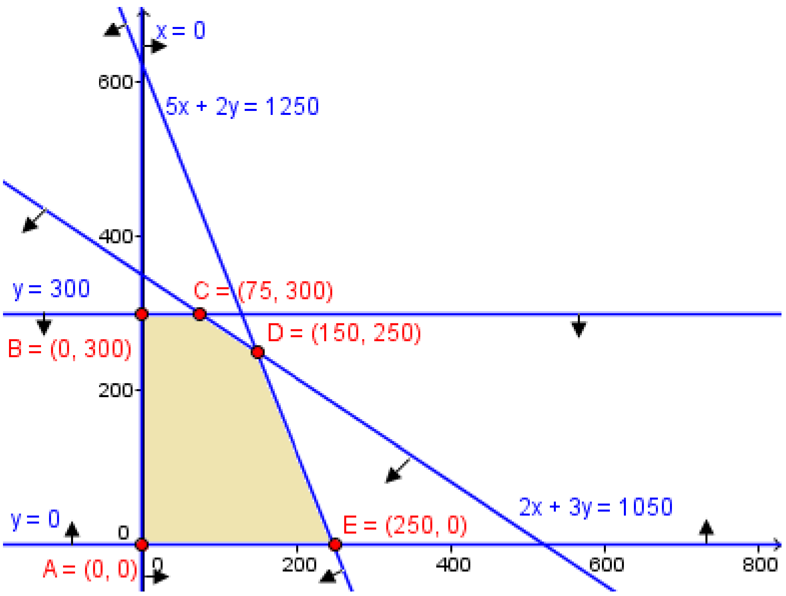
Los vértices $\boxed{A(0,\ 0)}$, $\boxed{B(0,\ 300)}$ y $\boxed{E(250,\ 0)}$ han surgido de las tablas de valores o son triviales. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

$$C: \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 1050 \\ y &= 300 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x + 3\cdot 300 = 1050 \Rightarrow x = \frac{1050 - 900}{2} = 75 \Rightarrow \boxed{C(75,\ 300)}.$$

$$D: \left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 1250 \\ 2x + 3y &= 1050 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 15x + 6y &= 3750 \\ -4x - 6y &= -2100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &5\cdot 150 + 2y = 1250 \Rightarrow \\ &y = \frac{1250 - 750}{5} = 100 \end{aligned}$$

$$11x \quad = 1650 \Rightarrow x = 150$$

Por tanto: $\boxed{D(150,\ 100)}$.



Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 0$

$F(B) = F(0, 300) = 30\cdot 0 + 50\cdot 300 = 15000$

$F(C) = F(75, 300) = 30\cdot 75 + 50\cdot 300 = 17250$

$F(D) = F(150, 250) = 30\cdot 150 + 50\cdot 250 = 17000$

$F(E) = F(250, 0) = 30\cdot 250 + 50\cdot 0 = 7500$

De donde deducimos que el máximo beneficio cumpliendo todas las condiciones se consigue confeccionando 75 camisas y 300 pantalones, siendo dicho beneficio de 17250€.

7) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

Distribuyendo los datos del enunciado en una tabla, podremos plantear el problema:

Tipos de ordenadores	Nº de unidades a fabricar	Horas / semana	Beneficio
A (fijos)	x	$4x$	$100x$
B (portátiles)	y	$10y$	$150y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x \leq 10$; $y \leq 15$	$4x + 10y \leq 160$	$F(x, y) = 100x + 150y$

Es decir, hemos de *maximizar* la *función objetivo*: $F(x, y) = 100x + 150y$
con las *restricciones*: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 10$; $y \leq 15$; $4x + 10y \leq 160$.

Para dibujar la región factible, cambiamos en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Para las rectas verticales, cuyas ecuaciones tienen la forma x = *número*, los semiplanos que verifican las inecuaciones correspondientes quedarán a izquierda de la recta (si la inecuación es $x \leq$ *número*) o a derecha (si $x \geq$ *número*). Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 10$: A la izquierda de $x = 10$.
- $y \leq 15$: Por debajo de $y = 15$.

- $4x + 10y = 160$:

x	0	40
y	16	0

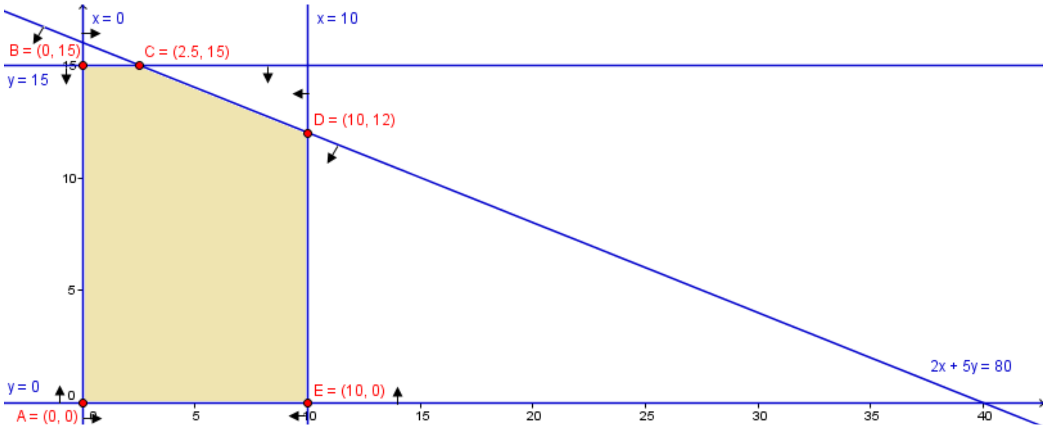
$4x + 10y \leq 160 \Rightarrow y \leq -0{,}4x + 16$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

Los vértices $\boxed{A(0, 0)}$, $\boxed{B(0, 15)}$ y $\boxed{E(10, 0)}$ han surgido de las tablas de valores o son triviales. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

- C: $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=80 \\ y&=15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x + 5\cdot 15 = 80 \Rightarrow x = \dfrac{80-75}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \boxed{C(2.5, 15)}$.

- D: $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=80 \\ x=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow y = \dfrac{80-20}{5} = 12 \Rightarrow \boxed{D(10,\ 12)}$.



Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0,\ 0) = 100\cdot 0 + 150\cdot 0 = 0$

$F(B) = F(0,\ 15) = 100\cdot 0 + 150\cdot 15 = 2250$

$F(C) = F(2.5,\ 15) = 100\cdot 2.5 + 150\cdot 15 = 2500$

$F(D) = F(10,\ 12) = 100\cdot 10 + 150\cdot 12 = 2800$

$F(E) = F(10,\ 0) = 100\cdot 10 + 150\cdot 0 = 1000$

Así, el beneficio máximo es de 2800€ y se obtiene fabricando 10 fijos y 12 portátiles.

8) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20€. Para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35€. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de librerías	Nº de unidades a fabricar	kg de madera	PVP
A (1 estante)	x	$4x$	$20x$
B (3 estantes)	y	$8y$	$35y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x \leq 120$; $y \leq 70$	$4x + 8y \leq 600$	$F(x, y) = 20x + 35y$

Expliquemos detalladamente qué hemos hecho.

Si se fabrican x librerías tipo A y cada una consume 4 kg de madera, la madera consumida por el total de librerías fabricadas de ese tipo es $4x$. Análogo para B. Como el total de madera disponible es de 600 kg, que no puede, pues, sobrepasarse, llegamos a la restricción $4x + 8y \leq 600$.

De igual forma, si el precio de cada una del tipo A son 20€, se ingresarán en total $20x$ por todas las fabricadas de tal tipo. Análogo para B. De donde el total de ingresos es $F(x, y) = 20x + 35y$, que constituye la *función objetivo*, que hay que maximizar.

Por otra parte, no se puede fabricar un número negativo de estanterías de ninguno de los dos tipos, de donde surgen que exijamos que $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como no pueden fabricarse más de 120 unidades de A, concluimos que $x \leq 120$. Análogo para $y \leq 70$.

Y, así, el problema es maximizar $F(x, y) = 20x + 35y$ sujeto a que: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 120$; $y \leq 70$; $4x + 8y \leq 600$.

Dibujamos el recinto delimitado por las restricciones (*región factible*).
Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa.
Para $x \geq 0$ resulta la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Similar ocurre con $x \leq 120$, que es el semiplano que queda a la izquierda de la recta vertical $x = 120$, y con $y \leq 70$, que nos da el semiplano inferior a la recta horizontal $y = 70$.
Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 120$: A derecha de $x = 120$.
- $y \leq 70$: Por debajo de $y = 70$.
- $4x + 8y = 600$:

x	0	150
y	75	0

$4x + 8y \leq 600 \Rightarrow y \leq \dfrac{-4x+600}{8}$

Semiplano inferior

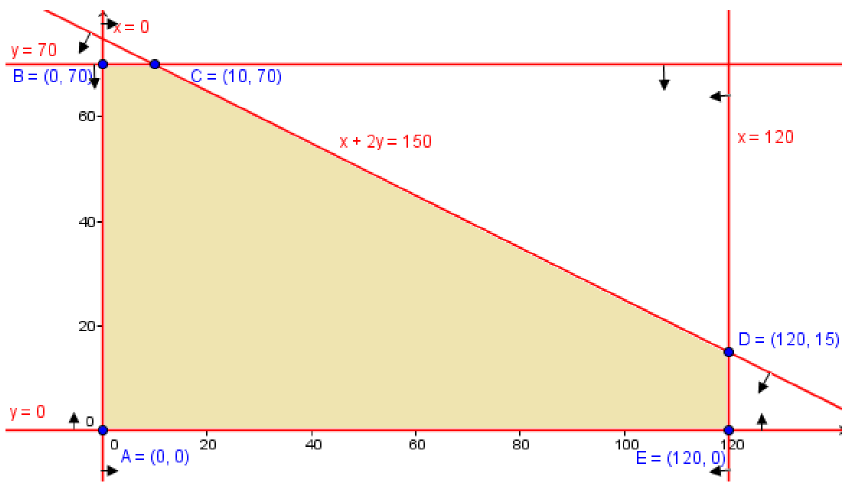
Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
Los vértices $\boxed{A(0, 0),\ B(0, 70)\ \text{y}\ E(120, 0)}$ son triviales. Calculemos el resto de ellos (nunca se pueden deducir del gráfico), para lo cual hemos simplificado la ecuación $4x + 8y = 600$ entre 4: $x + 2y = 150$:

C: $\left.\begin{aligned} x+2y&=150 \\ y&=70 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $x + 140 = 150 \Rightarrow x = 10$

Por tanto: $\boxed{C(10, 70)}$.

D: $\left.\begin{aligned} x+2y&=150 \\ x\quad&=120 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $120 + 2y = 150 \Rightarrow y = 15$

Por tanto: $\boxed{D(120, 15)}$.



Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice del recinto, obteniendo así dónde se alcanza su máximo y mínimo restringida a la *región factible*. Si alguno de ellos estuviese en dos vértices consecutivos, el máximo o mínimo correspondiente estaría en dichos vértices y en los infinitos puntos del segmento que los une:

$F(A) = F(0, 0) = 20\cdot 0 + 35\cdot 0 = 0$
$F(B) = F(0, 70) = 20\cdot 0 + 35\cdot 70 = 2450$
$F(C) = F(10, 70) = 20\cdot 10 + 35\cdot 70 = 2650$
$F(D) = F(120, 15) = 20\cdot 120 + 35\cdot 15 = 2925$
$F(E) = F(120, 0) = 20\cdot 120 + 35\cdot 0 = 2400$

Concluimos, pues, que:

Los ingresos máximos posibles son de 2925€, que se obtienen con 120 librerías de 1 estante y 15 de 3 estantes.

9) Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo *A* y 8 del tipo *B*. La contratación de un avión del tipo *A* cuesta 24000€ y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje. La contratación de uno del tipo *B* cuesta 6000€ y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo? *(3 puntos)*

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de aviones	Nº de aviones a contratar	Personas	Tm de equipaje	Precio
A	x	$200x$	$6x$	$24000x$
B	y	$100y$	$15y$	$6000y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $x \leq 11;\ y \leq 8$	$200x + 100y \geq 1600$	$6x + 15y \geq 96$	$F(x, y) = 24000x + 6000y$

Expliquemos detalladamente qué hemos hecho.

Si se contratan x aviones tipo *A* y cada uno puede transportar 200 personas, podremos transportar, en total, $200x$ personas como máximo. Análogo para *B*. Como hay que transportar a 1600 personas, la capacidad entre todos los aviones debe ser, al menos, dicha cantidad, de donde llegamos a la restricción $200x + 100y \geq 1600$.

Algo parecido sucede con el peso de equipaje a transportar: en total debe cubrir, como mínimo, nuestras necesidades, por lo que: $6x + 15y \geq 96$.

De igual forma, si el precio de cada uno del tipo *A* son 24000€, costarán todos los de dicho tipo, en total, $24000x$. Análogo para *B*. De donde el precio total es $F(x, y) = 24000x + 6000y$, que constituye la *función objetivo*, que hay que minimizar.

Por otra parte, no se puede contratar un número negativo de aviones de ninguno de los dos tipos, de donde surgen que exijamos que $x \geq 0;\ y \geq 0$.

Y sólo hay disponibles 11 aviones *A* y 8 tipo *B*, por lo que concluimos que $x \leq 11$ e $y \leq 8$.

Simplificamos $200x + 100y \geq 1600$ entre 100, y $6x + 15y \geq 96$ entre 3.

Y, así, el problema es minimizar $F(x, y) = 24000x + 6000y$ sujeto a que: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x \leq 11;\ y \leq 8;\ 2x + y \geq 16;\ 2x + 5y \geq 32$

Dibujamos el recinto delimitado por las restricciones (*región factible*).

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una

recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa.
Para $x \geq 0$ resulta la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Similar ocurre con $x \leq 11$, que es el semiplano que queda a la izquierda de la recta vertical $x = 11$, y con $y \leq 8$, que nos da el semiplano inferior a la recta horizontal $y = 8$.
Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 11$: A la derecha de $x = 11$.
- $y \leq 8$: Por debajo de $y = 8$.
- $2x + y =$ 16: Además, como $2x + y \geq 16 \Rightarrow y \geq -2x + 16$,

x	0	8
y	16	0

  Nos interesa el semiplano superior

- $2x + 5y =$ 32: Además, como $2x + 5y \geq 32 \Rightarrow$

x	0	16
y	32/5	0

  $\Rightarrow y \geq \dfrac{-2x+32}{5}$, por lo que nos interesa el semiplano superior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
El vértice $\boxed{B(11, 8)}$ es trivial. Calculemos el resto de ellos (nunca se pueden deducir del gráfico).

A: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=16 \\ y=8 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $2x + 8 = 16 \Rightarrow x = 4$

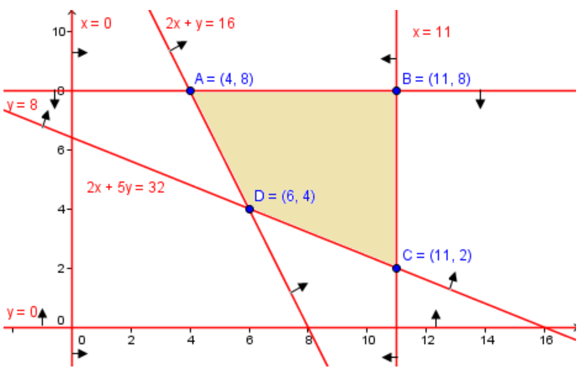
Por tanto: $\boxed{A(4, 8)}$.

C: $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=32 \\ x=11 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $22 + 5y = 32 \Rightarrow x = 2$

Por tanto: $\boxed{C(11, 2)}$.

D: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=16 \\ 2x+5y=32 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$Restando: $4y = 16 \Rightarrow$ $y = 4$. Sust. en la 1ª: $2x + 4 = 16 \Rightarrow x = 6$

Por tanto: $\boxed{D(6, 4)}$.



Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice del recinto, obteniendo así dónde se alcanza su máximo y mínimo restringida a la *región factible*. Si alguno de ellos estuviese en dos vértices consecutivos, el máximo o mínimo correspondiente estaría en dichos vértices y en los infinitos puntos del segmento que los une:

$F(A) = F(4, 8) = 24000\cdot 4 + 6000\cdot 8 = 144000$
$F(B) = F(11, 8) = 24000\cdot 11 + 6000\cdot 8 = 312000$
$F(C) = F(11, 2) = 24000\cdot 11 + 6000\cdot 2 = 276000$
$F(D) = F(6, 4) = 24000\cdot 6 + 6000\cdot 4 = 168000$

Concluimos, pues, que:

El mínimo gasto es de 144000€, que se obtienen con 4 aviones tipo A y 8 aviones tipo B.

10) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5, \quad 2x + y \ge -4, \quad 4x \le 10 - y, \quad y \ge 0$$

a) Represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

Representamos cada una de las rectas que resultan de cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las cuatro inecuaciones que definen el recinto.

- $y = x + 5$

x	0	–5
y	5	0

Como la inecuación es $y \le x + 5$, es decir, los puntos cuyo y sea menor o igual que el correspondiente al punto que está en la recta, el semiplano que nos interesa, de los dos en que ésta divide al plano, es el inferior a la recta.

- $2x + y = -4$

x	0	–2
y	–4	0

La inecuación es $y \ge -2x - 4 \Rightarrow$ Semiplano superior.

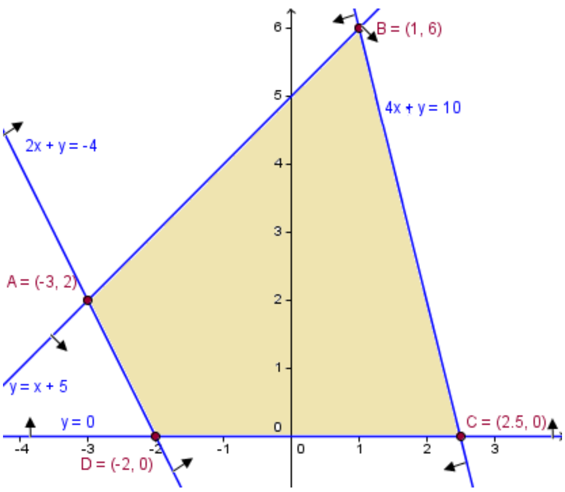
- $4x = 10 - y$

x	0	5/2
y	10	0

Inecuación: $y \le -4x + 10$: inferior

- $y \ge 0$: Semiplano superior al eje OX.

Con ello el gráfico del recinto es el adjunto.



Hay dos vértices que tenemos procedentes de las tablas de valores anteriores:

$\boxed{C(5/2, 0)}$ y $\boxed{D(-2, 0)}$.

El resto, hemos de calcularlos teniendo en cuenta que son intersecciones de rectas (el dibujo nos sirve para identificarlas):

$$A: \left.\begin{aligned} 2x + y &= -4 \\ x - y &= -5 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\text{Sust. en la } 2^{a}: \\ &y = x + 5 = -3 + 5 = 2 \Rightarrow \boxed{A(-3, 2)}. \end{aligned}$$
$$3x \quad = -9 \Rightarrow x = -3$$

$$B:\quad \begin{array}{l} -4x - y = -10 \\ \underline{-x + y = 5} \\ -5x \quad = -5 \Rightarrow x = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Sust. en la } 2^{a}: \\ y = x + 5 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow \boxed{B(1,\ 6)}. \end{array}$$

b) Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan.

Sustituimos f en cada vértice:

$f(-3, 2) = -3 + \frac{1}{2}2 = -2$

$f(1, 6) = 1 + \frac{1}{2}6 = 4$

$f(5/2, 0) = 5/2 + 0 = 5/2$

$f(-2, 0) = -2 + 0 = -2$

Así, el máximo valor de f es 4 y se alcanza en (1, 6). El mínimo es –2 y se alcanza en (–3, 2), (–2, 0) y los infinitos puntos del segmento que los une.

c) ¿Se alcanza el mínimo en el punto (–2.5, 1)?

La ecuación de la recta que une (–3, 2) con (–2, 0) es (en forma continua):

$$\frac{x+2}{-3+2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = -2(x+2) \Rightarrow y = -2x - 4$$

Desde $x = -3$ hasta $x = -2$, en todos los puntos de esta recta se alcanza el mínimo. Dado que si $x = -2.5$, se tiene: $y = -2\cdot(-2.5) - 4 = 5 - 4 = 1$, el punto dado está en la recta y entre –3 y –2. Por tanto, $\boxed{\text{sí que es un punto donde se alcanza el mínimo}}$.

Otra forma de verlo es ver si el punto (–2.5, 1) verifica todas las restricciones, en cuyo caso estará en la región factible, y que, además, la función objetivo toma en él el valor mínimo:

- $y \le x + 5$: $1 \le -2.5 + 5 \Leftrightarrow 1 \le 2.5$: la verifica.
- $2x + y \ge -4$: $2(-2.5) + 1 \ge -4 \Leftrightarrow -5 + 1 \ge -4 \Leftrightarrow -4 \ge -4$: la verifica.
- $4x \le 10 - y$: $4(-2.5) \le 10 - 1 \Leftrightarrow -10 \le 9$: la verifica.
- $y \ge 0$: $1 \ge 0$: la verifica.

Además: $f(-2.5, 1) = -2.5 + \frac{1}{2}1 = -2$: alcanza el valor mínimo.

Por tanto, $\boxed{\text{sí que es un punto donde se alcanza el mínimo}}$.