MATRICES

1. Determinar la matriz transpuesta de cada una de las siguientes;

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Efectúa la siguiente operación con matrices y calcula A

$$2\cdot A-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}-\left[5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

3. Sean $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinar:

a) $A^t+6B+3C$
b) $(A-C)^t+7B-6B^t$
c) $7A-2C+3(6A^t-2B)$
d) $A-A^t-3(B+C)$

4. Dadas las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Calcular:

a) $A\cdot B\cdot C$
b) $A\cdot(B+C)$
c) $B\cdot C\cdot A^t$
d) $(7B-6C)\cdot A^t$

5. Calcular A·B y B·A siendo A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y A^{428}

7. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ determinar A^2, A^3 y A^n

8. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo n natural.

9. Probar que $A^n=2^{n-1}\cdot A$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Hallar las matrices A^n y B^n siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1/n & 1/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

12. Se consideran matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in \Re$

a) Calcular M^n, n = 1,2,...
b) Hallar todas las matrices de M tales que $M^{100} = V$.

13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) calcular la matriz $(A-I)^2$
b) haciendo uso del apartado anterior determinar A^4.

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular B^3 y A^4 (Sugerencia: A=B+I)

15. Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) Demostrar $A^3+I_3=0$
b) Teniendo en cuenta el apartado anterior calcular A^{10}.

16. Demostrar $(A+B)^t=A^t+B^t$

17. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

18. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es multiplicándola por la dada.

19. Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar, para qué valores del parámetro m tiene inversa. Calcular la inversa para m = 2.

21. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que A es inversa de B.

22. Sea A = $\begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$. Calcular para que valores de a y b existe A^{-1}. Calcular la inversa de A en función de a y b.

23. Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ y calcularla en función de x.

24. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener si procede $(B\cdot A)^{-1}$

25. Se sabe (no es necesario que lo compruebe) que la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^2 = A + I$, siendo I la matriz identidad. Calcular A^{-1} y A^4.

26. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Sea A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el rango de A
b) Hallar A^{12}

28. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular una matriz X para que se cumpla la igualdad; $A = X \cdot B$

29. Hallar los valores de k para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) no tiene inversa

b) tiene rango 3

30. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A + A^t = 2I$, y $\det(A) = 2$, siendo I la matriz identidad, y A^t la transpuesta de la matriz A.

31. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de k para el que la matriz $(A - k \cdot I)^2$ sea la matriz nula.

32. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = C$, siendo $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

33. Resolver la ecuación matricial: $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = 2C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

35. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X, tal que $A \cdot X + B = A$

36. Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

37. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = -B \cdot A$.

38. Hallar una matriz de 2x2, distinta de I y de –I, cuya inversa coincida con su transpuesta siendo I la matriz identidad.

39. Sean A y B matrices de orden n. Demostrar que si A y B son invertibles, $A \cdot B$ también lo es y que se verifica $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

40. Comprobar que $A^2 = 2A - I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar A^{-1} y la matriz A^8.

41. Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$ donde I es la matriz unidad, comprobar que A es invertible.

42. Si A es una matriz cuadrada de orden nxn, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden nxn, ¿Qué matriz es B^2, sí $B = 2A - I$?

43. Determinar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2I - A$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

44. Calcular los valores del parámetro t para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix}$, coincida con su opuesta.

45. Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar la igualdad: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

46. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$ (no es preciso comprobarlo), determinar un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.

47. Para cada numero entero n, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}, \quad x \in \Re$$

a) Compruébese que $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$.
b) Como aplicación de lo anterior, calcúlese A_n^{-1}.

48.

a) Determinar los valores del parámetro real λ para los que tiene solución única la ecuación matricial $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
b) Resolver dicha ecuación matricial para $\lambda = 0$.

49. Hallar todos los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} para a = 1, si existe.

50. Estudiar el rango de la matriz A, según los valores de los parámetros a y b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & -b & 4 & 2 \\ b & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

51. Discutir razonadamente en función de a y b el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

52. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$: Calcular A^2 y A^{-1}.

53. Siendo A una matriz cuadrada de tercer orden y A^t su transpuesta, demostrar que $A+A^t$ es una matriz simétrica. Obtener la matriz inversa de $(A+A^t)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

54. Hallar la matriz X que satisface la ecuación AX = BA, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}$

55. ¿Tiene inversa siempre una matriz diagonal de orden 4?. Justifica la respuesta. ¿Tiene inversa la matriz B? En caso de que la tenga calcúlese.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&c\end{pmatrix}: a, b, c \in \Re$$

56. Calcula la inversa de la matriz A en función de **a** y **b**. $A=\begin{pmatrix}2a&b&1\\2&ab&1\\2&b&a\end{pmatrix}$

57. Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}a&-1&a-1&3\\0&a-2&-2&1\\0&1&a+3&-1\\0&-a&0&a\end{pmatrix}$ según los valores de **a**.

58. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ demostrar que A^3 es la matriz nula, y que si I es la matriz unidad de orden 3, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de la matriz I–A.

59. Sea $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&-1&5\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Compruebe que $(A+I)^2=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Justifica que A es invertible y obtener A^{-1} y A^2 en función de A.

60. Sea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, con a, b, c y d pertenecientes a $\Re$ y que la matriz A cumple las propiedades $A\cdot A = I$ y $\det(A) = 1$, siendo I la matriz identidad, calcular los coeficientes de la matriz A.

61. (Puntuación máxima: 2 puntos) Sea A una matriz cuadrada y sea I la matriz unidad. Pruébese que sí $A^2 + 5A = I$, entonces A es una matriz regular. Recuérdese que A es regular si admite función inversa o si tiene determinante no nulo)

62. Calificación máxima: 2 puntos. Sea $M=\begin{pmatrix}0&r\\s&0\end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r\cdot s \neq 1$. Calcular M^2, M^3, M^4, y M^{2k} para $k \in N$.

63. Calificación máxima: 2 puntos.

a) Hallar razonadamente los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}p&0&0\\1&p+1&1\\1&0&p-1\end{pmatrix}$$

b) Hallar la inversa para $p = 2$