

MATRICES

1. Determinar la matriz transpuesta de cada una de las siguientes;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Efectúa la siguiente operación con matrices y calcula A

$$2 \cdot A - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \left[5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinar:

- $A^t + 6B + 3C$
- $(A - C)^t + 7B - 6B^t$
- $7A - 2C + 3(6A^t - 2B)$
- $A - A^t - 3(B + C)$

4. Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Calcular:

- $A \cdot B \cdot C$
- $A \cdot (B + C)$
- $B \cdot C \cdot A^t$
- $(7B - 6C) \cdot A^t$

5. Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ siendo A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2 , A^3 y A^{428}

7. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ determinar A^2 , A^3 y A^n

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo n natural.

9. Probar que $A^n = 2^{n-1} \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Hallar las matrices A^n y B^n siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1/n & 1/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

12. Se consideran matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in \mathfrak{R}$

- a) Calcular M^n , $n = 1, 2, \dots$
 b) Hallar todas las matrices de M tales que $M^{100} = V$.

13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) calcular la matriz $(A-I)^2$
 b) haciendo uso del apartado anterior determinar A^4 .

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular B^3 y A^4 (Sugerencia:

$A=B+I$)

15. Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular:

- a) Demostrar $A^3 + I_3 = 0$
 b) Teniendo en cuenta el apartado anterior calcular A^{10} .

16. Demostrar $(A+B)^t = A^t + B^t$

17. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

18. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es multiplicándola por la dada.

19. Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar, para qué valores del parámetro m tiene inversa.

Calcular la inversa para $m = 2$.

21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que A es inversa

de B.

22. Sea $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$. Calcular para que valores de a y b existe A^{-1} . Calcular la inversa de A en función de a y b.

23. Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ y calcularla en función de x.

24. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener si procede $(B \cdot A)^{-1}$

25. Se sabe (no es necesario que lo compruebe) que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^2 = A + I$, siendo I la matriz identidad. Calcular A^{-1} y A^4 .

26. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular el rango de A
- Hallar A^{12}

28. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular una matriz X para que se cumpla la igualdad; $A = X \cdot B$

29. Hallar los valores de k para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

- no tiene inversa

b) tiene rango 3

30. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A + A^t = 2I$, y $\det(A) = 2$, siendo I la matriz identidad, y A^t la transpuesta de la matriz A.

31. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de k para el que la matriz $(A - k \cdot I)^2$ sea la matriz nula.

32. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = C$, siendo $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

33. Resolver la ecuación matricial: $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = 2C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

35. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X, tal que $A \cdot X + B = A$

36. Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

37. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = -B \cdot A$.

38. Hallar una matriz de 2×2 , distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su transpuesta siendo I la matriz identidad.

39. Sean A y B matrices de orden n. Demostrar que si A y B son invertibles, $A \cdot B$ también lo es y que se verifica $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

40. Comprobar que $A^2 = 2A - I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar A^{-1} y la matriz A^8 .

41. Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$ donde I es la matriz unidad, comprobar que A es invertible.

42. Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden $n \times n$, ¿Qué matriz es B^2 , si $B = 2A - I$?

43. Determinar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2I - A$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

44. Calcular los valores del parámetro t para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix}$, coincida con su opuesta.

45. Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar la igualdad: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

46. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$ (no es preciso comprobarlo),

determinar un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.

47. Para cada número entero n , se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

- a) Compruébese que $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$.
 b) Como aplicación de lo anterior, calcúlese A_n^{-1} .

48.

- a) Determinar los valores del parámetro real λ para los que tiene solución única la ecuación matricial

$$AX = B, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Resolver dicha ecuación matricial para $\lambda = 0$.

49. Hallar todos los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{pmatrix}. \text{ Calcular } A^{-1} \text{ para } a = 1, \text{ si existe.}$$

50. Estudiar el rango de la matriz A , según los valores de los parámetros a y b .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & -b & 4 & 2 \\ b & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

51. Discutir razonadamente en función de a y b el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

52. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$: Calcular A^2 y A^{-1} .

53. Siendo A una matriz cuadrada de tercer orden y A^t su transpuesta, demostrar que $A+A^t$ es una matriz simétrica. Obtener la matriz inversa de $(A+A^t)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

54. Hallar la matriz X que satisface la ecuación $AX = BA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

55. ¿Tiene inversa siempre una matriz diagonal de orden 4?. Justifica la respuesta. ¿Tiene inversa la matriz B ? En caso de que la tenga calcúlese.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathfrak{R}$$

56. Calcula la inversa de la matriz A en función de a y b . $A = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$

57. Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & a-1 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a+3 & -1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores de a .

58. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ demostrar que A^3 es la matriz nula, y que si I es la matriz unidad de orden 3, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de la matriz $I - A$.

59. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Compruebe que $(A+I)^2=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Justifica que A es invertible y obtener A^{-1} y A^2 en función de A .

60. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con a, b, c y d pertenecientes a \mathfrak{R} y que la matriz A cumple las propiedades $A \cdot A = I$ y $\det(A) = 1$, siendo I la matriz identidad, calcular los coeficientes de la matriz A .

61. (Puntuación máxima: 2 puntos) Sea A una matriz cuadrada y sea I la matriz unidad. Pruébese que si $A^2 + 5A = I$, entonces A es una matriz regular. Recuérdese que A es regular si admite función inversa o si tiene determinante no nulo)

62. Calificación máxima: 2 puntos. Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$. Calcular M^2, M^3, M^4 , y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.

63. Calificación máxima: 2 puntos.

a) Hallar razonadamente los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la inversa para $p = 2$