EJERCICIO 1 DE SELECTIVIDAD Sep'02 A

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores de *m* para que dicha matriz tenga inversa.

b) (2 puntos) Haciendo *m* = 4, resuelva la ecuación matricial X · A = (3 1 1).

a) ¡Este tipo de ejercicios (con parámetros) no se pide este año!

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}\end{array} \rightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & m-6 \\ 0 & m+1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} C_3 & C_1 & C_2 \end{array}\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & m-3 \\ 0 & m+1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} F_1 \\ F_2+3F_1 \\ F_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & m-3 \\ 0 & 0 & 15+2m-m^2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3-(m+1)F_2 \end{array}$$

La matriz inversa de A existirá cuando el rango de A sea 3, es decir cuando $15+2m-m^2 \neq 0$.

$$15+2m-m^2=0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 15\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2\pm\sqrt{64}}{-2} = \frac{-2\pm 8}{-2} = \begin{cases} m_1 = -3 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Conclusión: la matriz inversa de A existe cuando *m* toma los valores del conjunto ℝ - {-3, 5}.

b) Calculemos la inversa de A (para *m* = 4) por el método de Gauss:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \\ \underline{\qquad A \qquad}\quad \underline{\qquad I \qquad}\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-5F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -10 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 7 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -14 & 0 & 30 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & -10 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} 7F_1+F_3 \\ 7F_2-3F_3 \\ F_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 28 & 0 & 0 & 24 & 8 & -4 \\ 0 & -14 & 0 & 30 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & -10 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} 2F_1+F_2 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/7 & 2/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -15/7 & -5/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 & -1/7 & 4/7 \end{array}\right)\begin{array}{l} (1/28)F_1 \\ (-1/14)F_2 \\ (1/7)F_3 \end{array} \\ \underline{\quad I \quad}\qquad \underline{\qquad\quad A^{-1} \qquad\quad}\end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 & -1/7 \\ -15/7 & -5/7 & 6/7 \\ -10/7 & -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

Resolvamos la ecuación matricial:

$$\left.\begin{array}{r} X\cdot A = (3\ \ 1\ \ 1) \\ X\cdot A\cdot A^{-1} = (3\ \ 1\ \ 1)\cdot A^{-1} \\ X\cdot I = (3\ \ 1\ \ 1)\cdot A^{-1} \\ X = (3\ \ 1\ \ 1)\cdot A^{-1} \end{array}\right| \Rightarrow X = (3\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 & -1/7 \\ -15/7 & -5/7 & 6/7 \\ -10/7 & -1/7 & 4/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$