

MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar: a) A^{-1} ; b) B^{-1} ; c) $A \cdot B$; d) $B \cdot A$; e) $3A + 2B$; f) $C \cdot A$; g) $C \cdot B$; h) $C \cdot D$; i) A^2 ; j) B^2 ; k) $3A + A^2$; l) $B^2 - A \cdot B$

Soluciones:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/2 \\ -5/2 & 1 & -1/2 \\ -9/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \\ 1 & 13 & -6 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 11 & -6 & -1 \\ 11 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad B^2 - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices A y B. Calcula $A+B$, $A-B$, A^2 , B^2 , AB , BA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A-B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.- Halla $AX = B$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Demostrar que A satisface la relación de recurrencia $A^n = 2^{n-1} A$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.- Halla el determinante de A y su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = -32 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ -19/32 & 1/4 & 1/8 & 1/32 \\ 7/32 & -1/4 & 3/8 & 3/32 \\ 5/32 & 1/4 & 1/8 & -7/32 \end{pmatrix}$$

6.- Aplicando la función de la matriz inversa. Calcula la inversa de la matriz A. Comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.- Dadas las matrices siguientes. Calcula la potencia enésima.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2-n}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2+n+1}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } E^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } \begin{cases} n \text{ par } F^n = I \\ n \text{ impar } F^n = F \end{cases}$$

8.- Calcula los siguientes determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{Sol: } -9; 7; -4$$

9.- Hallar la solución de la ecuación:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & x & 8 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix} = 0 \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sol: a) $x=-1$; $x=1$; b) $x=4$; $x=12$; c) $x=2$

10.- Resolver aplicando las propiedades de los determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0 \quad b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ a^2 & ab & x \end{vmatrix} = 0 \quad c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ x & -b & -c \end{vmatrix} = 0 \quad d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & x \\ x & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Sol: a) $x = b$; $x = c$; b) $x = b/2$; $x = ac$; c) $x = -a$; $x = 2b$; d) $x = a$; $x = -c$

11.- Según el valor del determinante A calcular razonadamente el valor del determinante B:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{g} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ \mathbf{2a} & \mathbf{2g} & \mathbf{2b} \\ 2x & 2z & 2y \end{vmatrix} \quad \text{Sol: } B = 8A$$

12.- Demostrar que el determinante vale 0

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

13.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Sol: 21; -5; -14

14.- Sin desarrollar demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

15.- Resolver las ecuaciones: a) $A \cdot X = B$; b) $A + X = B$; c) $A^{-1} \cdot X = B$; d) $2A - X = 3B$,
siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: a) } X = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1/2 & 4 & 5/2 \\ -1/2 & -3 & -3/2 \end{pmatrix}; \text{ b) } X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}; \text{ d) } X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

16.- Hallar A^{-1} y B^{-1} de las matrices del ejercicio anterior:

$$\text{Sol: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

17.- Calcular por determinantes A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

18.- Calcular el rango de M según los valores de t:

$$a) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & t & t \end{pmatrix} \quad b) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & t \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $t=1$ $r(M)=2$; $t \dots 1$ $r(M)=3$;
 b) $t=4$ $r(M)=1$; $t \dots 4$ $r(M)=2$

19.- Calcular a para que M tenga inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & a & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: a) } a \dots 1; \text{ b) } a \dots 1; \text{ c) } a \dots 3$$

$$20.- \text{ Dadas las matrices: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

resolver las ecuaciones: a) $AX+B=C$; b) $AX+BX=C$; c) $AX+2X=B$; d) $AXB=C$

$$\text{Sol: a) } X = \begin{pmatrix} -1/6 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 4/3 & 0 \\ 5/6 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) X = \begin{pmatrix} 7/13 & -7/13 & 6/13 \\ 1/13 & 12/13 & -1/13 \\ 9/13 & 4/13 & 17/13 \end{pmatrix}$$

$$c) X = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -3/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7/2 & -4 & -9/4 \end{pmatrix}; \quad d) X = \begin{pmatrix} 5/6 & 4/3 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

21.- Calcula

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \quad \text{Sol: } (a+b)^4 \cdot (a-b)^4$$

22.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} a & \operatorname{cos} a \\ 1 & \operatorname{sen} b & \operatorname{cos} b \\ 1 & \operatorname{sen} c & \operatorname{cos} c \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen}(a-c)$$

23.- Calcular

$$\begin{vmatrix} I & -I & 3 & -I \\ 1 & 2 & -I & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & I & -2 & -1 \end{vmatrix} = 50 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$$\begin{vmatrix} -I & I & 1 & -I \\ 1 & -1 & -I & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -31$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 39 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11 \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 38 \quad \begin{vmatrix} -21 & -6 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = -90$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 81$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24 \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

24.- Dada la matriz A averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1} . Calcula A^{-1} para $m = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: $m \neq 3$ y $m \neq 1$

inversa. $A = \begin{pmatrix} 2 & | & x-2 \\ 1 & | & x \end{pmatrix}$
 Sol: -2; 2/3

25.- Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene

26.- Resuelve $AXB + C = D$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

27.- Calcular el rango de la matriz A. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: $r(A) = 2$

28.- Dada la matriz B calcular los valores de y para que su rango sea 2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & y & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } y = -1$$

29.- Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

a) Haciendo ceros. b) Desarrollándolo por los elementos de una línea.

Sol: -12

30.- Comprobar sin desarrollar que son nulos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 31 \\ 4 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

31.- Dadas las matrices A y B calcula la matriz $P = A^2B + B^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 16 \\ 2 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

32.- Resuelve la ecuación matricial $X-3A = A^2B$; siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

33.- Calcula el rango de las matrices siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -5 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } r(C) = 2; r(A) = 2; r(B) = 4$$

34.- Calcula A^n , siendo:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n^2+n}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{35.- Sabiendo que } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{Halla: } a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & z & y \\ a & c & b \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2c & b-c & a \\ 2z & y-z & x \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a-2 & b & c-2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sol: } a) 3; b) -6; c) 3$$

36.- Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n. ¿Es cierto, en general, la igualdad siguiente?: $A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$. Sol: No

37.- Halla la matriz enésima de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \frac{n^2-n}{2} & -n & 1 \end{pmatrix}$$

38.- Encuentra los valores de x, y, z, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sol: $x = -1$; $y = 1$; $z = 2$

39.- Encuentra la matriz X tal que: a) $AX+B=C$; b) $AXB=C$; c) $AX+BX=C$; d) $AX+X=B$; e) $2X+XA=C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3/4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \\ -3/4 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/3 & 2/3 \\ -7/10 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 1/15 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 7/36 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

40.- Sea $A \cdot B = A \cdot C$, ¿se puede asegurar que $B = C$?; y si $A \cdot B = 0$; ¿se puede asegurar que $A=0$ ó $B=0$?

Sol: No; No

41.- Hallar k para que la matriz A no tenga inversa. Calcular la inversa para $k = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } k = 1; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

42.- Resolver la ecuación matricial $AX+B=C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

47.- Se dice que dos matrices cuadradas de orden n, A y B conmutan, si $AB = BA$. Obtener las matrices A que conmuta con la B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

48.- Calcular los determinantes: a) Haciendo ceros; b) Desarrollando por los elementos de una línea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol: 5; -48

49.- Dada la matriz A. Calcula los valores de m para que tenga inversa. Di para qué valores de m A es una matriz singular. Rango de A.
Sol: a) $m \neq -2$ y $m \neq -1/2$; b) ; c) $m = 2$ ó $m = -1/2$ $\Rightarrow r(A) = 2$; $m \neq -2$ y $m \neq -1/2$ $\Rightarrow r(A) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & m & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ m & -1 & m \end{pmatrix}$$

50.- Encontrar la matriz X que verifique que: $X \cdot B^2 = AB$;
 $AX+B=C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: a) } \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

51.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: $r(A) = 2$; $r(B) = 4$

52.- Dadas las matrices A y B calcula la matriz $P = A^2B + B^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 11 & 9 & 17 \\ 14 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

53.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol: $r(A) = 2$; $r(B) = 4$

54.- Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & -4 & 4 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Sol: } x = 2; x = -6$$

55.- Calcula sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 11 & 10 \\ 7 & 11 & 18 & 19 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & x & y-z \\ 1 & y & x-z \\ 1 & z & x-y \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

57.- Halla A+B; 2A+3B; siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } A+B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 11 & 9 & 5 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix} \quad 2A+3B = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 7 \\ 26 & 21 & 12 \\ 22 & 39 & 28 \end{pmatrix}$$

58.- Hallar las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: no existe } A^{-1}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ -8/3 & -1/3 & 1 \\ 11/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/35 & -1/35 & 9/35 \\ 3/35 & -8/35 & 2/35 \\ 6/35 & 3/70 & 4/35 \end{pmatrix}$$

59.- Hallar el rango de las siguientes matrices según valores de x:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ x & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 4 & x \\ -1 & -x & 1-x \end{pmatrix}$$

Sol: x=0 rango 3
x...0 rango 4

Sol: x=3 rango 2
x...3 rango 3

Sol: x=2 rango 1
x...2 rango 3

60.- Resolver las ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & -x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 4 & x & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Sol: 0 y -2; -1/7

61.- Calcular el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 8 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Sol = -142; -54; 43

62.- Sin desarrollar los determinantes, utilizando sus propiedades, comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} yz & 1/x & x \\ zx & 1/y & y \\ xy & 1/z & z \end{vmatrix} = 0$$

63.- ¿Existe algún valor de x que haga inversibles las matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & x \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -1 & -2 \\ 4 & 1 & x \end{pmatrix} ?$$

Sol: a) ninguna; b) x ... -3 y 2

64.- Resuelve las ecuaciones matriciales siguientes: a) $AXB=C=I$; b) $CX+AX=B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } a) \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1 \\ -5/6 & 1/3 & 7/3 \\ 1/6 & -7/6 & 1/3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & 3/2 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$