



## EXAMEN DE MATEMÁTICAS - 1ª EVALUACIÓN - 2º BACH. - 25-XI-2011

Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

1) Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son  $|A| = \frac{1}{2}$  y  $|B| = -2$ . Halla, razonadamente:

- a) [0,5 p]  $|A^3|$
- b) [0,5 p]  $|A^{-1}|$
- c) [0,5 p]  $|-2A|$
- d) [0,5 p]  $|A \cdot B^t|$  siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de  $B$ .
- e) [0,5 p] El rango de  $B$

2) Sean  $A$  y  $B$  dos matrices que verifican:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) [1 p] Halla las matrices  $(A+B)(A-B)$  y  $A^2 - B^2$
- b) [1,5 p] Resuelve la ecuación matricial  $XA - XB - (A+B)^t = 2I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 2 y  $(A+B)^t$  la matriz traspuesta de  $A+B$ .

3) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) [1,75 p] Calcula el rango de  $A$  según los diferentes valores de  $t$ .
- b) [0,75 p] Razona para qué valores de  $t$  el sistema  $A \cdot X = O$  tiene más de una solución.

4) Dado el sistema de ecuaciones lineales 
$$\left. \begin{array}{l} -\lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

- a) [1,75 p] Clasifica el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .
- b) [0,75 p] Resuelve el sistema para  $\lambda = 0$ .

## SOLUCIÓN

1) Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son  $|A| = \frac{1}{2}$  y  $|B| = -2$ . Halla, razonadamente:

a)  $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b)  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 2$

c)  $|-2A| = (-2)^3 |A| = -4$  (un -2 por cada fila, es de orden 3)

d)  $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) El rango de  $B$  es 3, ya que  $|B| = -2 \neq 0$

2) Sean  $A$  y  $B$  dos matrices que verifican:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices  $(A+B)(A-B)$  y  $A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Para hallar  $A^2 - B^2$ , hallamos primero  $A$  y  $B$ , resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} 2A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve la ecuación matricial  $XA - XB - (A+B)^t = 2I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 2 y  $(A+B)^t$  la matriz traspuesta de  $A+B$ .

$$XA - XB - (A+B)^t = 2I \rightarrow XA - XB = 2I + (A+B)^t \rightarrow X(A-B) = 2I + (A+B)^t$$

$X = [2I + (A+B)^t](A-B)^{-1}$ , Llamamos  $C = 2I + (A+B)^t$  y la calculamos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hallamos ahora } (A-B)^{-1}: A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A-B| = 8 \begin{cases} A_{11} = 2 & A_{12} = 1 \\ A_{21} = -4 & A_{22} = 2 \end{cases}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ y por último, calculamos } X$$

$$X = [2I + (A+B)^{\dagger}] (A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de  $A$  según los diferentes valores de  $t$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)(t+3) + (t-1)(-2t-1) - 2(t+3) = -t^2 + 3t - 2 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Para  $t=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  dos filas proporcionales y  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$

Para  $t=2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  con  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$

Para  $t \neq 1$  y  $t \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

b) Razona para qué valores de  $t$  el sistema  $A \cdot X = O$  tiene más de una solución. Hemos visto que para  $t \neq 1$  y  $t \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$ , y la matriz ampliada tiene el mismo rango (sólo se añade una columna de ceros), sistema compatible determinado, sólo tiene la solución trivial.

Para  $t = 1$  ó  $t = 2$ , tenemos que el rango de  $A$  es 2, menor que el número de incógnitas, luego (por Rouché-Fröbenius) el sistema es compatible indeterminado, es decir tiene más de una solución.

$$4) \text{ Dado el sistema de ecuaciones lineales } \left. \begin{array}{l} -\lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ estudiamos los rangos de ambas matrices}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda^2 - 1 + \lambda = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(-2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \lambda = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dos filas iguales)} \rightarrow r(A^*) = 2 \text{ Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = 2 \neq 0 \rightarrow r(A^*) = 3 \text{ Sistema incompatible}$$

Para  $\lambda \neq 0$  y  $\lambda \neq 1 \rightarrow r(A) = 3 = r(A^*)$  Sistema compatible determinado

b) Resuelve el sistema para  $\lambda = 0$ .

Para  $\lambda = 0$ ,  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$ , nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{array} \right\} \text{ hacemos } z = \mu \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - \mu \\ x = 2 - \mu \end{cases} \text{ Solución: } \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$