

## UNIDAD 8.- Determinantes (tema 2 del libro)

### 1. DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

**Definición:** Para una matriz cuadrada de orden 2,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , se define el **determinante** de  $A$  y se nota por  $\det(A)$  ó  $|A|$ , al siguiente n° real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**Definición:** Para una matriz cuadrada de orden 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , se define el **determinante** de  $A$  y se

nota por  $\det(A)$  ó  $|A|$ , al siguiente n° real:

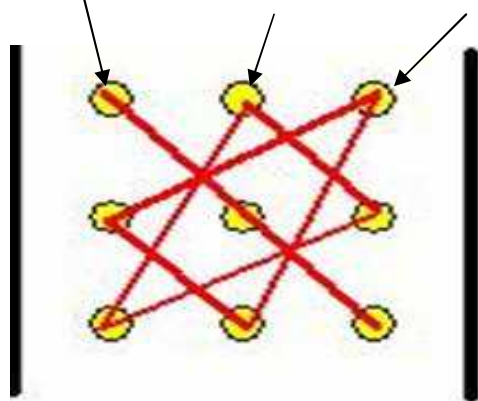
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) = (\text{sin paréntesis})$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

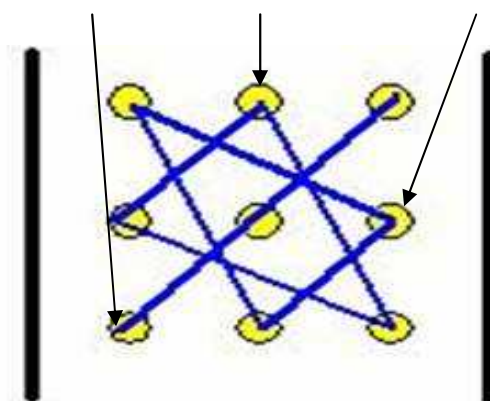
**Regla de Sarrus:** Para recordar con mayor facilidad el desarrollo del determinante de orden 3, podemos usar esta regla:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$



positivos

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$



negativos

**Ejemplo 1.-** Calcular los siguientes determinantes:

a)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-5) = -6 + 5 = -1$

b)  $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & a \end{vmatrix} = a^2 - 100$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -12 + 30 - 16 = 2$$

**Ejemplo 2.**- Calcular el valor de  $x$  en la siguiente igualdad con determinantes:

$$\det \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x-1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x-1 \rightarrow (\text{hacemos el determinante por la regla de Sarrus}) \quad x(x-1) \cdot 2 = x-1 \rightarrow$$

$$2 \cdot x^2 - 2 \cdot x = x-1 \rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

**VER:** Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 35

## 2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = |A'|$$

2.- Si los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un  $n^\circ$ , el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho  $n^\circ$ . Esto también nos permite extraer factor común por filas o columnas para hacer un determinante más simple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{metemos el 2 en la Fila 1}) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{metemos el 2 en la columna 3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (\text{cualquiera de$$

esos 3 determinantes da el mismo resultado, -32)

$$\text{Veamos un ejemplo de sacar factor: } \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 30 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (\text{la Columna 1 tiene como factor común 6, podemos$$

$$\text{extraerlo}) 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (\text{además la Fila 2 tiene como factor común 5, y lo extraemos}) 6 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = ($$

ya aplicamos Sarrus)  $= 30(0 + 2 + 6 - 0 - 2 - 8) = -60$

**OJO:** Si tenemos una matriz  $A$  cuadrada de orden  $n$ , y la multiplicamos por un  $n^\circ k$ , entonces el determinante queda multiplicado por  $k^n$ , pues  $k$  multiplica a cada fila. Es decir,  $|k \cdot A| = k^n |A|$

3.- Si los elementos de una fila o columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas o columnas excepto dicha columna o fila cuyos sumandos pasan respectivamente a cada uno de los determinantes.

$$\det(F_1, \dots, F_i + F_i', \dots, F_n) = \det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) + \det(F_1, \dots, F_i', \dots, F_n)$$

**Ejemplo 3:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 3 \\ 4 & 5+2 & 5 \\ 2 & 3-2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = [5 + 10 + 36 - 30 - 15 - 4] + [2 + 10 - 24 - 12 - 4 + 10] = 2 + (-18) = -16$$

4.- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \text{ y de ello también se tiene que } |A^n| = |A|^n$$

**Ejemplo 4.-**

$$\left( \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{array} \right) = 28 - 25 = 3 \\ \left( \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right) = 3 \cdot 1 = 3 \end{array} \right.$$

5.- Si en una matriz permutamos (cambiamos) dos filas entre si (o dos columnas entre si), el determinante cambia de signo.

$$\det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_n) = -\det(F_1, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n)$$

**Ejemplo 5.-**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 10 + 36 - 30 - 15 - 4 = 2 \text{ . Si cambiamos la columna 1 con la columna 3, el determinante cambia}$$

$$\text{de signo, veámoslo: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 4 + 15 - 5 - 36 - 10 = -2 \text{ .}$$

Sólo se puede hacer filas con filas o columnas con columnas, y si hacemos varias permutaciones, si el número es par, el determinante no varía, pero si el número es impar el determinante cambia de signo.

6.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales (o columnas iguales o proporcionales), entonces el determinante vale 0.

**Ejemplo 6.-**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 23 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ pues si nos damos cuenta la fila 3 es 3 veces la fila 1: } F_3 = 3 \cdot F_1$$

7. Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes filas o columnas, entonces el determinante vale 0

**Ejemplo 7.-**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ pues si nos damos cuenta } C_3 = C_1 + 2 \cdot C_2 \text{ , es decir, la columna 3 es combinación lineal de la}$$

columna 1 y de la columna 2.ç

8.- Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes filas o columnas, el determinante no varía. Es decir, podemos sumar filas con filas o columnas con columnas, y el determinante no varía.

**Ejemplo 8.-**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (\text{vamos a sumar a la fila 2 la fila 1, esto se denota por } F_2 = F_2 + F_1) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (\text{ahora en este determinante a la fila 3 le restamos dos veces la fila 1, esto se denota } F_3 = F_3 - 2F_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

**NOTA:** Un determinante con toda una fila o columna de ceros, su valor es 0

**VER:** Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 39

### 3. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

**Definición:** Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  cuadrada de orden  $n$ , se llama **menor complementario** del elemento  $a_{ij}$  y se representa por  $\alpha_{ij}$ , al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila  $i$  y la columna  $j$

**Ejemplo 9.-** En la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , calculamos algunos de sus 9 menores complementarios

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

**Definición:** Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  cuadrada de orden  $n$ , se llama **adjunto** del elemento  $a_{ij}$  y se representa por  $A_{ij}$ , a producto del menor complementario  $\alpha_{ij}$  por el signo correspondiente a la paridad de la suma  $i + j$ . Es decir,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de una matriz  $A = (a_{ij})$  cuadrada de orden  $n$ , se llama **matriz adjunta** de  $A$  y se representa por  $Adj(A)$

**Ejemplo 10:** Calcular la matriz adjunta de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

Luego:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 11.-** Ver ejemplo del libro en margen izquierdo de la página 40

**Propiedad:** Se tiene que  $Adj(A^t) = [Adj(A)]^t$

**Desarrollo de un determinante por adjuntos:** El determinante de una matriz cuadrada cualquiera es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Así, si tenemos que calcular  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ , podemos hacerlo por Sarrus o bien desarrollando por una

de sus filas o columnas, por ejemplo:

Si desarrollamos por la fila 2:  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

Si desarrollamos por la columna 1:  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$

Este método se suele utilizar en combinación con la propiedad 8 del punto anterior para hacer ceros en una determinada fila o columna y después proceder al desarrollo por adjuntos respecto de dicha fila o columna. Este método se suele usar en determinantes de orden mayor a 3.

**Ejemplo 12.-** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , vamos a calcular su determinante de diferentes maneras:

a) Por Sarrus:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 18 - 20 - 16 + 15 + 18 = -9$

b) Desarrollando por la columna 3 (se puede hacer por la que queramos):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{13} + (-3) \cdot A_{23} + 6 \cdot A_{33}$$

Calculamos los adjuntos:  $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9$ ,  $A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ ,  $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

Por tanto:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 5 = -36 - 3 + 30 = -9$

c) Haciendo ceros:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$  (hacemos  $F_2 = F_2 + F_1$  y  $F_3 = F_3 - 2F_1$  para hacer ceros en la

primera columna)  $= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$  (desarrollamos ahora por la primera columna, y como vemos sólo

tenemos que calcular  $A_{11}$ , pues los demás están multiplicados por 0) =  $1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} =$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \quad \text{Este último determinante de orden 2 también se podía haber hecho haciendo ceros}$$

De esto podemos concluir que:

- El determinante de una matriz triangular o diagonal es el producto es igual al producto de los elementos de la diagonal principal
- El determinante de la matriz unidad es 1
- El determinante de la matriz nula es 0

**VER:** Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 41

#### 4. MATRIZ INVERSA USANDO DETERMINANTES

Recordemos que la matriz inversa de una matriz cuadrada  $A$  es aquella matriz  $A^{-1}$  que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman regulares

Las matrices que no tienen inversa se llaman singulares

**Propiedad:** Una matriz  $A$  es regular (es decir, tiene inversa) si y sólo si  $|A| \neq 0$

**Teorema.-** Dada una matriz  $A$  regular, entonces su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [Adj(A)]^t \quad \text{o bien} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} [Adj(A^t)]$$

**Ejemplo 13:** Calcular la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 \neq 0 \rightarrow A$  es regular y por tanto  $\exists A^{-1}$

Aplicamos cualquiera de las dos fórmulas del teorema, por ejemplo la primera  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [Adj(A)]^t$

Calculamos la matriz adjunta de  $A$  (lo hacéis vosotros, es muy fácil)  $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ . Ahora la

trasponemos:  $[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  y por último multiplicamos por  $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Comprobación:** Efectuamos  $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\text{fácil de ver que es } I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejemplo 14:** Calcular la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante:  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 + 2 + 0 - 8 = 1 \rightarrow A$  es regular y por

tanto  $\exists A^{-1}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$	$A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$	$A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$
$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$	$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$	$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$
$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$	$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7$	$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$

La matriz adjunta nos queda:  $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ . Calculamos la traspuesta y la multiplicamos por

$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$ , obteniendo que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

### Propiedades de la inversa:

1.- Si existe  $A^{-1}$ , ésta es única

2.-  $(A^{-1})^{-1} = A$

3.-  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4.-  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

### 5. RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Como ya sabemos el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Veamos como calcular lo con determinantes.

**Definición:** Se llama menor de orden  $k$  de una matriz  $A$  de dimensión  $m \times n$  al determinante de orden  $k$  formado por los elementos que pertenecen a  $k$  filas y a  $k$  columnas de la matriz  $A$ . Es decir, son los determinantes de cualquier submatriz cuadrada de  $A$

**Ejemplo 15.-** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , tenemos que es de dimensión  $2 \times 3$  y por ello podemos tomar submatrices cuadradas de orden 1 y orden 2

Menores de orden 1: Son los elementos de la matriz 2, 1, 5, 3, 0 y 1

Menores de orden 2: Sólo hay 3 menores de orden 2 que son:  $\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13 \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$  Ojo al tomar los menores

pues no podemos tomar aleatoriamente los elementos del menor, este determinante  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  no es un menor pues no es una submatriz de  $A$

**Ejemplo 16.-** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$  que es cuadrada de orden 3. Tiene menores de orden 1, de orden 2 y de orden 3.

Menores de orden 1: Son los 9 elementos de la matriz

Menores de orden 2: Hay 9 menores de orden 2, como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}, \dots$

Menores de orden 3: Sólo hay uno y es el determinante de la matriz  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

**Propiedad:** El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo

**Ejemplo 16.-** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$  que es cuadrada de orden 3. Vamos a calcular su rango.

Empezamos con los de mayor orden, en este caso, el único es  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -25 - 28 - 24 + 30 + 28 + 20$

$= 1 \neq 0 \rightarrow$  El rango es 3 pues ya no hay menores de mayor orden  $\rightarrow A$  tiene las 3 filas o las 3 columnas linealmente independientes

**VER:** Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 44, 45, 50 y 51

**EJERCICIOS:** De la página 52, los ejercicios 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9  
De la página 53, los ejercicios 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.