PROGRAMACIÓN LINEAL

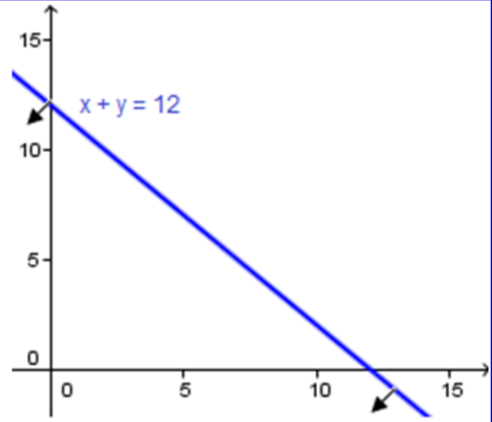
1. Inecuación lineal con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una desigualdad de la forma:

$$ax + by \leq c$$

La solución es uno de los dos semiplanos delimitados por la recta $ax + by = c$.
Para averiguarla:

1) Dibujamos la recta $ax + by = c$. Puede ser suficiente con los puntos de corte con los ejes (hacemos $x = 0$ y calculamos el y asociado; después, $y = 0$ y hallamos x).
2) Tenemos dos opciones:
   a) Despejamos y en la inecuación (recordar que si pasamos *multiplicando o dividiendo* un número *negativo* al otro miembro de la inecuación, la desigualdad cambia de sentido; lo mismo sucede al *multiplicar o dividir* ambos miembros por un número *negativo*). Si nos queda $y \leq$ *expresión*, la solución es el semiplano que queda *bajo* la recta. Y si es $y \geq$ *expresión*, se trata del semiplano *sobre* la recta.
   b) Tomamos un punto del plano, al azar, que *no esté en la recta*. Si hace cierta la inecuación, el semiplano solución es *aquél en el que se encuentra el punto*. En caso contrario, es *el otro*. Se suele tomar (0, 0) si no está en la recta.
3) Señalamos el semiplano solución de alguna manera. Por ejemplo, con unas flechitas.



Solución de $x + y \leq 12$

2. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

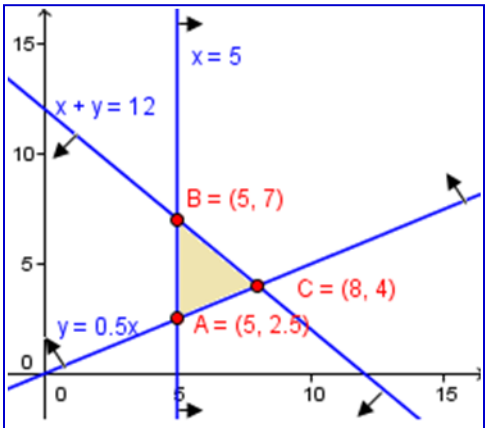
Se trata de un *conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas* que deben cumplirse *todas a la vez*.

La solución es una *región del plano* delimitada por segmentos rectilíneos. Los puntos que los unen se denominan *vértices*. Esta región *puede no estar limitada* y marcar, por tanto, un área infinita. O puede ser *vacía*: el problema no tendría solución.

La región solución se denomina <u>*región factible.*</u>

Para averiguarla, resolvemos cada inecuación por separado como se ha indicado y deducimos el área que verifica todas las inecuaciones a vez.

Los *vértices* de la región se hallan resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por las rectas que se unen en cada uno de ellos.



Solución del sistema:
$x + y \leq 12 \quad x \geq 5 \quad y \geq 0.5x$

3. Problemas de Programación Lineal

A nivel de Bachillerato, estos problemas consisten en hallar *qué punto de una región factible* proporciona el valor *óptimo* (máximo o mínimo) de una <u>*función objetivo*</u> de la forma $F(x, y) = ax + by + c$.

La resolución consta de tres fases:

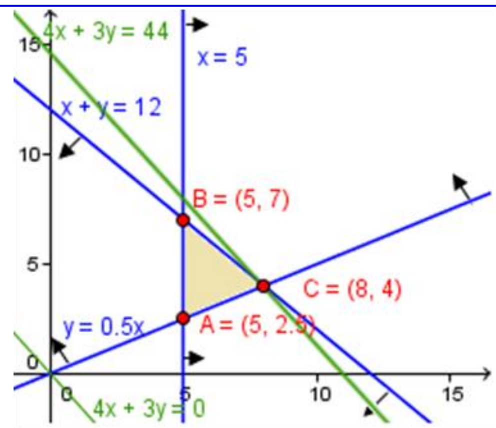
Fase 1 (Planteamiento). Traducir un enunciado a un *sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas* (denominadas *restricciones*) y construir la *función objetivo*.
Para ello, suele ser útil organizar los datos en un cuadro de doble entrada: en filas (por ejemplo), las variables (queremos hallar qué valor deben tomar para optimizar la función objetivo), y en columnas, los diferentes conceptos que restringen sus valores.
No olvidar que muy frecuentemente las variables no pueden tomar valores negativos, por lo que dos restricciones habituales son $x \geq 0$, $y \geq 0$, que nos limitan al primer cuadrante.

Fase 2 (Dibujar la Región Factible).

Fase 3 (Encontrar la Solución)
Hay dos métodos.

a) Método gráfico. Si $F(x, y) = ax + by + c$ es la *función objetivo*, dibujamos la recta $ax + by = 0$.
  - Si el coeficiente de y (b) es positivo y estamos *maximizando*, buscamos la *paralela más alta posible* que aún toca a algún punto de la *región factible*. Lo hará en *un vértice* o en *dos vértices consecutivos y en todos los puntos del segmento que los une*. Ahí encontramos la solución. Y si estamos *minimizando*, buscamos la *paralela más baja posible*.
  - Si el coeficiente de y es negativo, es al revés: la recta más baja para maximizar, y la más alta para minimizar.

  Una vez decidido el vértice (o vértices) que dan la solución, hay que:
    - Hallar sus coordenadas.
    - Calcular el valor de la función objetivo en dicho vértice (sustituyendo sus coordenadas en la función objetivo).
    - Si hay dudas entre dos o más vértices, calcular las coordenadas de todos ellos y evaluar la función objetivo en los mismos para decidir cuál proporciona el mejor valor para la misma.
    - Si hay empate en dos vértices, la solución la tenemos en *ambos y, además, en todos y cada uno de los puntos del segmento que los une*.



Máximo de $F(x, y) = 4x + 3y$ con las restricciones:
$x + y \leq 12$ $x \geq 5$ $y \geq 0.5x$
Lo obtenemos en C y vale 44: $F(C) = 44$

b) Método analítico.
  - Calculamos las coordenadas de *todos los vértices*.
  - Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos (sustituyendo en ella sus coordenadas).
  - Comparamos dichos resultados: escogemos el vértice que proporciona el mejor valor (máximo o mínimo, según). En dicho vértice está la solución y el valor óptimo de la función objetivo es el que le corresponde.
  - Si hay empate en dos vértices, la solución la tenemos en *ambos y, además, en todos y cada uno de los puntos del segmento que los une*.

Si la región factible no está limitada, puede no haber solución (ser infinita).