

Límites y continuidad

1. En los apartados siguientes, usar la gráfica de las funciones para hallar el límite si existe:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x); f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

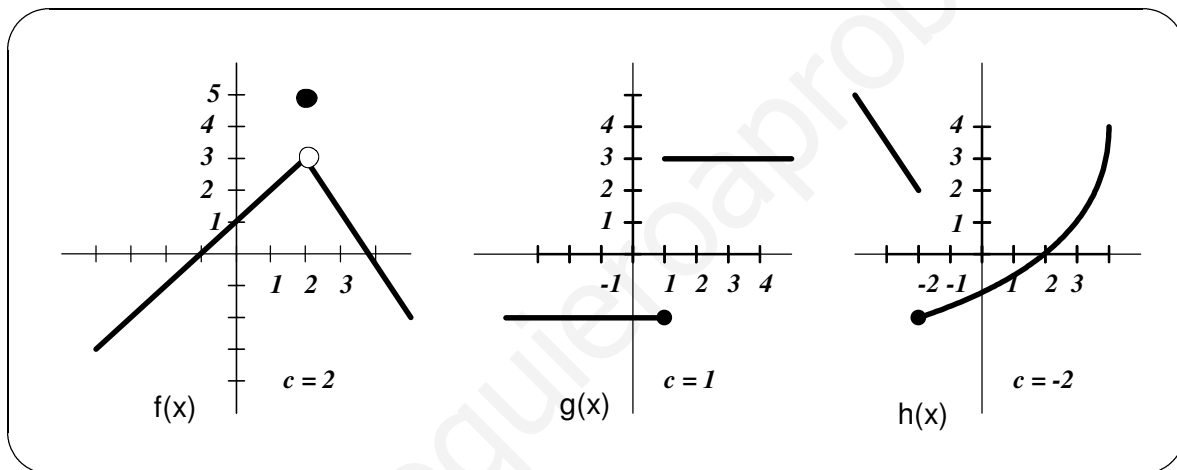
(d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x); f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$

2. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{x+3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x-3}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{4}{5}}{x-4}$

3. Determina gráficamente los límites $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$, $\lim_c f(x)$ de las siguientes funciones:



4. Hallar, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2-25}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x^2-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$; (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$; (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3}, & x > 3 \end{cases}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1 - x, & x > 1 \end{cases}$

5. Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{-x^3}{2}$; (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$; (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$; (d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; (f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; (g) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$

(h) $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ (i) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2-4x+1, & x > 2 \end{cases}$

6. Hallar a tal que la función $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$ sea continua.

7. Hallar a y b de modo que hagan continua la función $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax+b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$

8. Calcular $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ (b) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ (c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$

9. Calcular $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ de las funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

10. Hallar las asíntotas verticales (si hay) de las funciones:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$; $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$; $f(x) = \frac{2+x}{x-2}$; $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$; $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$

11. Hallar los siguientes límites:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+x}{1-x}$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{x^2-16}$; $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2+16}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \frac{1}{x})$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \frac{1}{x})$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x-1)}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

12. Determina las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$; (b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$; (c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
 (d) $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4+1}$; (e) $f(x) = \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}}$; (f) $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2+1}$

13. Halla los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{3x+4})^{4x-2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2-2x}{3x^2+5})^{5x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{3x^2+5x})$
 (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+5} + 2x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{5x^2-2x}{5x^2+2x})^{3x^2}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-\sqrt{5x^2-9}}{x^2-9}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+16}-4}{3x^2-2x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{3x-2}{4x+2})^{\frac{-5}{(x-1)^2}}$

14. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$. Se pide:

(a) Representarla gráficamente. (b) Halla $f(1)$ y $f(3)$. (c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

15. Comprueba que $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$.

16. Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{x-4} = 3$. Haz una gráfica de la función para ayudarte.

17. Comprueba que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = 1$. Haz una gráfica de la función para ayudarte.

18. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$. ¿Cómo serán sus gráficas? ¿Cuánto valen, en cada uno de los casos, la imagen de 2 y su límite cuando x tiende a 2?

19. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x < 2 \\ x^2+2kx-2k, & x \geq 2 \end{cases}$, tenga límite cuando x tienda a 2.

20. Calcula el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ cuando $f(x)$ es: (a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, (b) $f(x) = \frac{-x}{x-2}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, (d) $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$

Analiza el comportamiento gráfico de $f(x)$ en $x = 2$ en cada uno de los casos.

21. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-3x^2}{x^2-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{-x}{(x+1)^2} \right]^{\frac{2}{x-1}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2-2x+1}{x+2} \right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x)^{1-2x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x+1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{3x-4}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1+x}{3+2x} \right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2x}}{3x-2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{4x-1} \right]^{2x-3}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -3} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}}$

(ñ) $\lim_{x \rightarrow 1} [2x + 3]^{\frac{3}{(x-1)^2}}$

(o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]^{\frac{2}{x^2-1}}$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2 + 3x}}{2x - 2}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^3 - 8}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{2 - \sqrt{2x - 2}}$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + 3x}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{2x^2 + 4x}}{\sqrt{3x - 2} - 2}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - x \right]$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - \sqrt{4x^2 - 2x + 3} \right]$$

22. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \right]$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x + 2 \right]$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-3} \right]^{3x-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{2x-1} \right]^{4x+5}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+3}{2x-3} \right]^{3x-1}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x+3}{2x} \right]^{\frac{1}{x-3}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x+1} \right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x-1}{2x+1} \right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \right]^{2x+1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

23. Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

$$(a) f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ en } x = 2.$$

$$(b) f(x) = \frac{2}{x-3} \text{ en } x = 3.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \text{ en } x = 2.$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x < -1 \\ -2x + 4, & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1.$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x < 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1.$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 3x-2, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}, & 2 < x \end{cases} \quad \text{en } x=1 \text{ y en } x=2.$$

Soluciones

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x) = 1$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4-x) = 2 \neq f(2) = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \neq f(1) = 1$

(e) $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} 1, & x > 5 \\ -1, & x < 5 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-1)$, no existe el límite.

(f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{|x-2}}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x^6} = \frac{-1}{4}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{4(x+1)} = \frac{-1}{16}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{4}{5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{5(x+1)} = \frac{1}{25}$

3. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -2$$

4. (a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{(x+5)} = \frac{1}{10}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x-2} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x+2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{2} = \frac{5}{2} \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{12-2x}{3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4x+6) = 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2+4x-2)$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3+1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x)$

5. (a) $f(x)$ es continua en su dominio que es \mathbb{R} .

(b) $f(x)$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(c) $f(x)$ presenta en $x = -1$ una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2, f(-1) \text{ no existe.}$$

(d) $f(x)$ presenta en $x = 2$ y $x = -2$ discontinuidades inevitables.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

(e) $f(x)$ presenta en $x = 1$ una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(f) $f(x)$ es continua en su dominio que es \mathbb{R} .

(g) $f(x)$ presenta en $x = 5$ una discontinuidad inevitable y en $x = -2$ una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} = -\frac{1}{7} \text{ y } f(-2) \text{ no existe.}$$

(h) $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , ya que es continua también en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 3) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = f(1)$$

(i) $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x) = -4 = f(2) \neq -3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 1)$$

6. Para que $f(x)$ sea continua ha de serlo en $x = 2$, ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

$$f \text{ continua en } x = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 = 4a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{(como los tres valores han de ser iguales)}$$

$$8 = 4a \Rightarrow a = 2$$

7. Para que $f(x)$ sea continua ha de serlo en $x = -1$ y en $x = 3$, ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

$$f \text{ continua en } x = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \end{array} \right\} \Leftrightarrow -a + b = 2$$

$$f \text{ continua en } x = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + b = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -2 = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 3a + b = -2$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \left\{ \begin{array}{l} -a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 1$$

8. (a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$

(a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty$

9. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

10. (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ posee como asíntota vertical la recta $x = 0$.

(b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$ posee como asíntotas verticales las rectas $x = 2$ y $x = -1$.

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ posee como asíntotas verticales las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

(d) $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ posee como asíntota vertical la recta $x = 0$.

(e) $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$ posee como asíntota vertical la recta $x = 2$.

(f) $f(x) = \frac{2+x}{x-2}$ posee como asíntota vertical la recta $x = 2$.

(g) $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$ No tiene asíntotas verticales.

(h) $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$ posee como asíntota vertical la recta $x = 2$.

11. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$ (b)

(c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{x^2-16} = +\infty$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2+16} = \frac{1}{2}$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = 0$$

12. (a) La función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$ posee como asíntota horizontal la recta $y = 3$.

(b) La función $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ posee como asíntotas horizontales las rectas $y = 2$ e $y = -2$.

(c) La función $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ posee como asíntota horizontal la recta $y = 0$.

(d) La función $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4+1}$ posee como asíntota horizontal la recta $y = 2$.

(e) La función $f(x) = \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}}$ posee como asíntotas horizontales las rectas $y = 3$ e $y = -3$.

(f) La función $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2+1}$ posee como asíntota horizontal la recta $y = 5$.

13. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x^2 \ln \frac{3x-2}{3x+4}}}{e^{4x^2 \ln \frac{3x+4}{3x-2}}} = e^{-8}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 5}\right)^{5x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4x - \sqrt{3x^2 + 5x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^2 - 5x}{4x + \sqrt{3x^2 + 5x}} = +\infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5} + 2x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} = 0$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+2}\right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x^2 \ln \frac{5x-2}{5x+2}}}{e^{3x^2 \ln \frac{5x+2}{5x-2}}} = e^{-6} = 0$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2+9}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{x^2+9}}{x^3(2\sqrt{x^2+9})} = \frac{4}{6x^2} = \frac{1}{6}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+64}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{x^2+16}}{x^2(2\sqrt{x^2+16})} = \frac{4}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

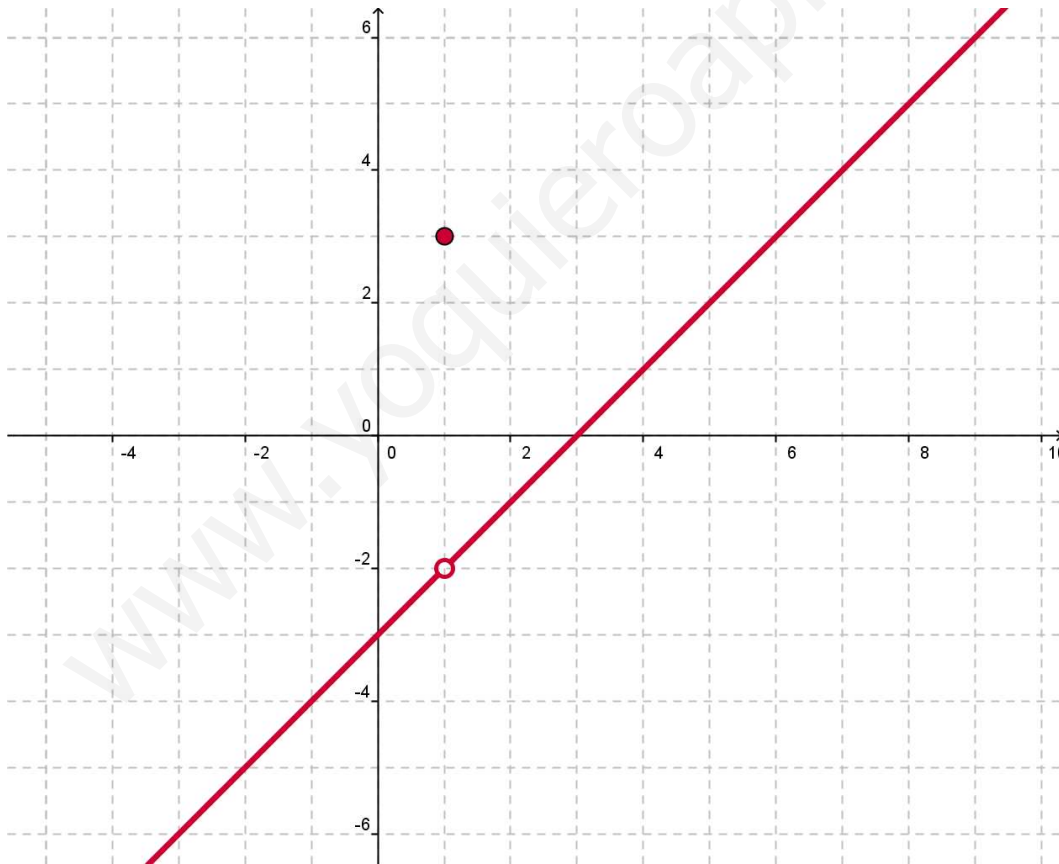
$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-2}{4x+2}\right)^{\frac{5}{(x-1)^2}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\infty} = +\infty$$

14.

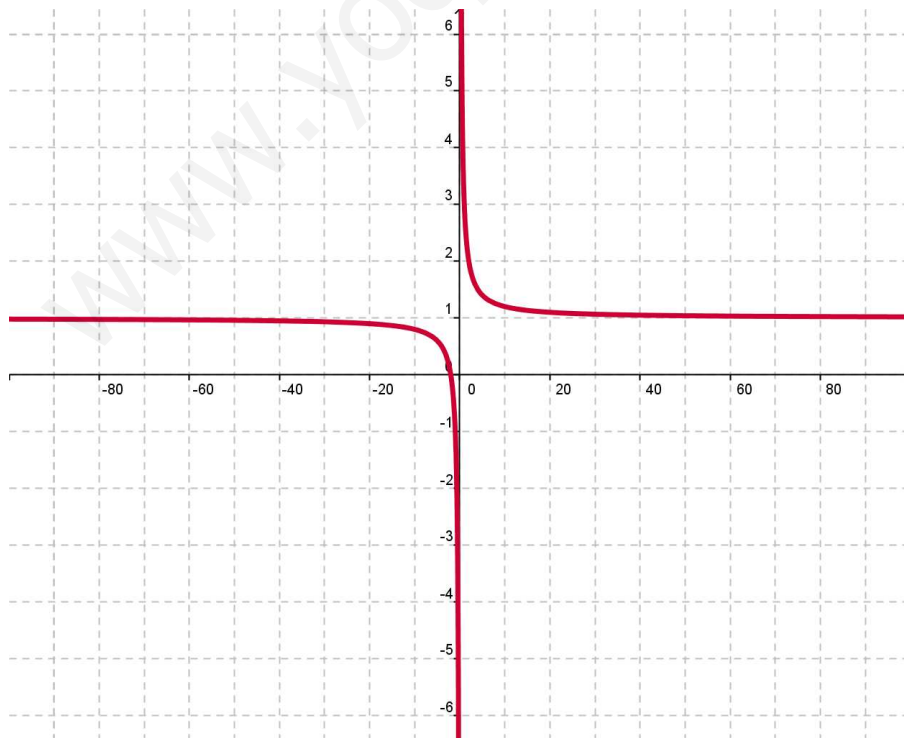
(b) $f(1) = 3, f(3) = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2 \neq f(1).$ $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0 = f(3).$

15. y 16.



17.



18. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x-2} & x \neq 2 \\ \sin \alpha & x = 2 \end{cases}$ y $g(x) = x + 2$. Sus gráficas únicamente difieren en el punto de abscisa $x = 2$. La recta

$g(x)$ pasa por el punto $(2,4)$ y a la recta $f(x)$ le falta el punto con abscisa $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$$

19. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 2) = 2 = 4 + 4k - 2k = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2kx - 2k) \Rightarrow k = -1$

20. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$, $f(2)$ no existe.

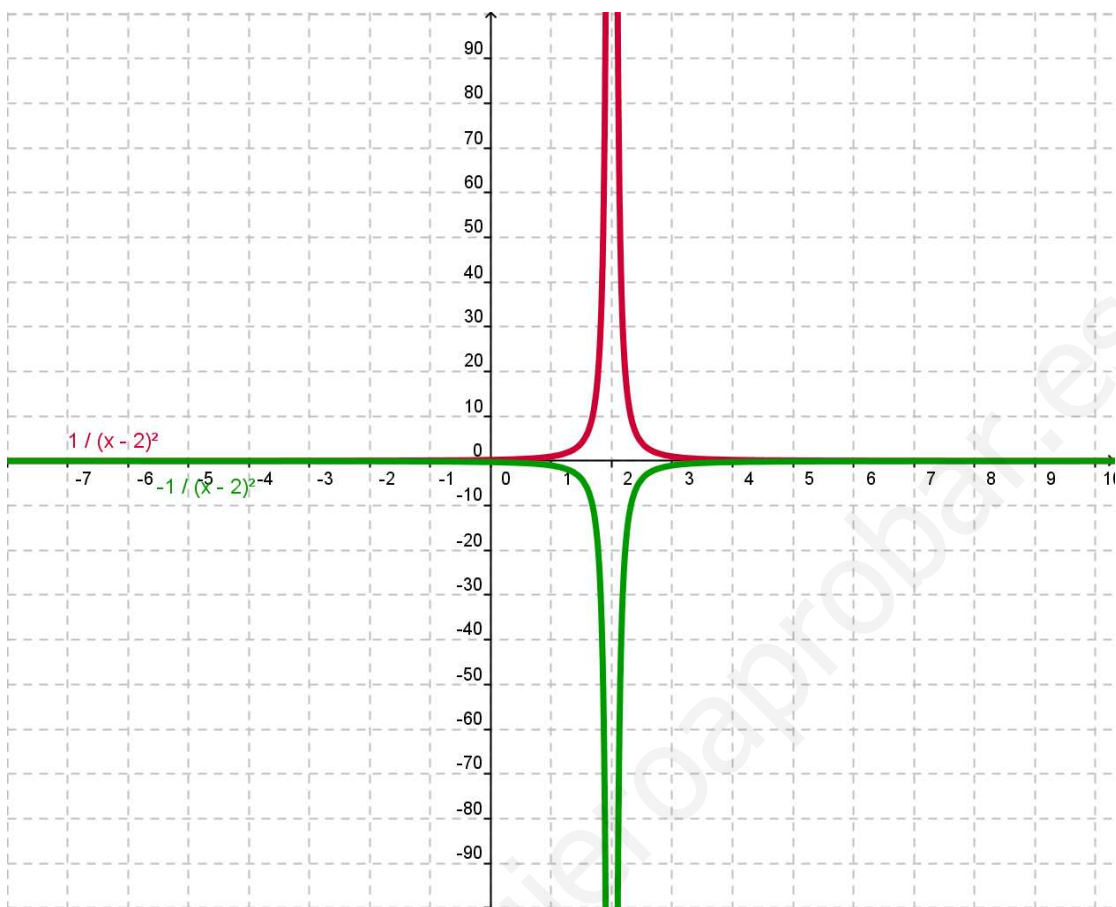
(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{x-2} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{x-2}$, $f(2)$ no existe.

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$, $f(2)$ no existe.

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2}$, $f(2)$ no existe.

En todos los casos la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.





21. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-3x^2}{x^2-1} = -3 \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{-x}{(x+1)^2} \right]^{\frac{2}{x-1}} = \infty^{-1} = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x-1} = 0 \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2-2x+1}{x+2} \right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}} = 0^{-\infty} = \infty$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1} = +\infty \quad (f) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x)^{1-2x} = \infty^{-\infty} = 0$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1} = +\infty \quad (h) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1} = -\infty \quad (j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{3x-4} = 0$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1+x}{3+2x} \right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}} \quad \# \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2x}}{3x-2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{4x-1} \right]^{2x-3} = \left(\frac{1}{4} \right)^{-\infty} = \infty$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -3^-} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^{-\infty} = 0$$

$$(ñ) \lim_{x \rightarrow 1} [2x + 3]^{\frac{3}{(x-1)^2}} = 5^\infty \quad (o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]^{\frac{2}{x^2-1}} = 1$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2+3x}}{2x-2} = \frac{5}{2}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3x-14}{x^3-8} = \frac{11}{12}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+4x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = 32$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x}-3}{2\sqrt{2x}-2} = \frac{12}{-2} = -6$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+3x} = \frac{1}{12}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{10}{3}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - x \right] = \frac{-3}{2} \quad (z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - \sqrt{4x^2 - 2x + 3} \right] = \frac{1}{2}$$

22. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \right] = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x + 2 \right] = \frac{3}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-3} \right]^{3x-1} = e^9 \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{2x-1} \right]^{4x+5} = e^{-6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+3}{2x-3} \right]^{3x-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^\infty \quad (f) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x+3}{2x} \right]^{\frac{1}{x-3}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x+1} \right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}} = e^{\frac{-3}{10}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x-1}{2x+1} \right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}} = e^{-1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \right]^{2x+1} = e^3$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} = 0$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1} = 1$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1} = -1$$

23. Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$ en $x=2$. Es continua por ser polinómica.

(b) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ en $x=3$. No es continua ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(3) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ en $x=2$. No es continua ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1 \end{array} \right\}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x < -1 \\ -2x+4, & x \geq -1 \end{cases}$ en $x=-1$. No es continua ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+5) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x+4) = 6 \end{array} \right\}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x < 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$ en $x=1$. No es continua ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 \end{array} \right\}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 3x-2, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}, & 2 < x \end{cases}$ en $x=1$ y en $x=2$.

No es continua en $x=1$ ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-2) = 1 \end{array} \right\}$

No es continua en $x = 2$ ya que: $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1 \end{array} \right\}$

www.yoquieroaprobar.es