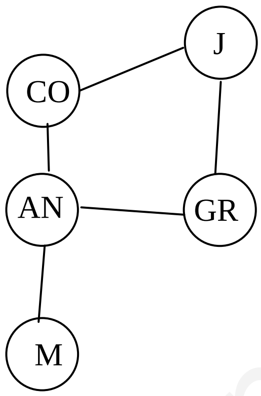
NOMBRE: ____

1) a) Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{aligned} -4x+ay-2z&=8\\ ax+2y+5z&=-8\\ 5x-8y-z&=-8 \end{aligned}\right\}$$

   b) Resolverlo cuando $a = 3$. *(1,5 puntos)*

2) La red de carreteras principales de Andalucía Central puede esquematizarse en el siguiente grafo:



   Representar la matriz de adyacencia correspondiente. *(1 punto)*

3) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-5&3\\0&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8\\3\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

   a) Calcule A^3. *(1 punto)*
   b) Determine la matriz X para que $A\cdot X+B\cdot C=D$. *(2 puntos)*

4) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.
   El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos, pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.
   ¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo. *(3 puntos)*

SOLUCIONES

1) a) Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{array}{r} -4x+ay-2z=8 \\ ax+2y+5z=-8 \\ 5x-8y-z=-8 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & a & -2 & 8 \\ a & 2 & 5 & -8 \\ 5 & -8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Vamos a estudiar el rango de esta matriz por el método de orlar menores. Cuando hay parámetros, el proceso debe hacerse a la inversa que de costumbre. Es decir, en lugar de buscar un menor no nulo cada vez de mayor dimensión, tomamos el menor más grande posible (en este caso, el de la propia matriz de los coeficientes A) y vemos cuándo es nulo y cuándo no lo es.

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & a & -2 \\ a & 2 & 5 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 25a + 16a + 20 + a^2 - 160 = a^2 + 41a - 132$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 + 41a - 132 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-41 \pm \sqrt{1681+528}}{2} =$$

$$= \frac{-41 \pm 47}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-88}{2} = -44 \\ = \frac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Analizamos cada caso:

- $\boxed{\text{Si } a \neq -44 \text{ y } a \neq 3}$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ r(A) = 3 $\Rightarrow$ r(A') = 3, pues ningún menor de A' puede tener más de 3 filas $\Rightarrow$ r(A) = r(A') = nº de incógnitas, por lo que estamos ante un *sistema compatible determinado*, según el *Teorema de Rouché-Fröbenius*.
- $\boxed{\text{Si } a = -44}$, podemos escribir la matriz ampliada exacta, sin desconocer ningún número, que era lo que pasaba al comienzo:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & -44 & -2 & 8 \\ -44 & 2 & 5 & -8 \\ 5 & -8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A| = 0$, porque éste valor de a era uno de los dos para los que ocurría esto. De modo que $r(A) = 2$, ya que hay un menor de orden 2 no nulo dentro de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 40 = 38$$

Lo orlamos con la primera fila y la última columna, para conocer el rango de A':

$$\begin{vmatrix} -44 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -8 \\ -8 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 1760 + 32 - 352 + 320 - 32 + 352 = 2080 \neq 0$$

por lo que $r(A') = 3$. Como $r(A) \neq r(A')$, es un $\boxed{\textit{sistema incompatible}}$, y no tiene solución.

- Si $\boxed{a = 3}$, la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & -8 \\ 5 & -8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

de la que sabemos también que $|A| = 0$, como antes. Tenemos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17$. Así que $r(A) = 2$. Lo orlamos en A':

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & -8 \\ 5 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 64 - 120 - 192 - 80 + 72 + 256 = 0 \Rightarrow r(A') = 2$$

Al ser $r(A) = r(A') <$ nº de incógnitas, tenemos un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

b) Resolverlo cuando $a = 3$. *(1,5 puntos)*

Según el estudio anterior, por el *Teorema de Rouché-Fröbenius*, podemos eliminar la tercera fila de A', porque, al no formar parte del menor principal (el menor no nulo de mayor orden que hemos encontrado), es combinación lineal de las otras dos (su ecuación correspondiente no aporta, por tanto, información adicional). Llamamos $z = t$, siendo t un número fijo libremente escogido por nosotros (ya no es incógnita). Y lo hacemos con z porque tampoco está en el menor principal. Reconstruimos el sistema resultante y pasamos t al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} -4x + 3y &= 8 + 2t \\ 3x + 2y &= -8 - 5t \end{aligned}\right\}$$

Por *Cramer* (el menor principal está calculado de antes, y vale –17):

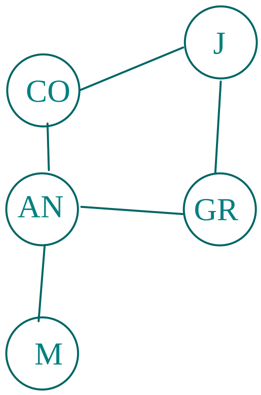
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8+2t & 3 \\ -8-5t & 2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{16+4t+24+15t}{-17} = \frac{-19t-40}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 8+2t \\ 3 & -8-5t \end{vmatrix}}{-17} = \frac{32+20t-24-6t}{-17} = \frac{-8-14t}{17}$$

Por lo que las infinitas soluciones tienen la estructura: $\boxed{\left(\frac{-19t-40}{17}, \frac{-8-14t}{17}, t\right)}$

Dependiendo del menor principal elegido, otras posibilidades válidas son: $\left(t, \frac{24+14t}{19}, \frac{-17t-40}{19}\right)$ ó $\left(\frac{19t-24}{14}, t, \frac{-17t-8}{14}\right)$

2) La red de carreteras principales de Andalucía Central puede esquematizarse en el siguiente grafo:



Representar la matriz de adyacencia correspondiente. *(1 punto)*

Es de suponer que las conexiones entre los nodos son de doble sentido. Ponemos un 1 si hay conexión entre el nodo de la fila a la columna correspondientes. Y 0 en caso contrario. Así:

$$\begin{array}{c} \\ CO \\ AN \\ M \\ J \\ GR \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} CO & AN & M & J & GR \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^3. *(1 punto)*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}}$$

b) Determine la matriz X para que $A \cdot X + B \cdot C = D$. *(2 puntos)*

$$A \cdot X + B \cdot C = D \;\Rightarrow\; A \cdot X + B \cdot C - B \cdot C = D - B \cdot C \;\Rightarrow\; A \cdot X + O = D - B \cdot C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; A \cdot X = D - B \cdot C \;\Rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (D - B \cdot C) \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}(D - B \cdot C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(D - B \cdot C)}$$

Lo cual supone que existe la inversa de A. Y como:

$$|A| = 10 - 9 = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$$

Calculémosla:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$D - B\cdot C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(D - B\cdot C) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

4) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.
El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos, pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.
¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo.
(3 puntos)

Para elegir las incógnitas, consideramos que lo que nos piden es el número de contenedores de cada tipo que debe comprar: A ó B. Llevamos la información del enunciado a la tabla siguiente, añadiendo que no podemos comprar un número negativo de contenedores de ninguno de los dos tipos, resultando:

Tipos de contenedores	Nº de contenedores a comprar	Gambas	Langostinos
A	x	$2x$	$3x$
B	y	y	$5y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $x + y \leq 50$	$2x + y \geq 50$	$3x + 5y \geq 180$

Función Objetivo: $F(x, y) = 350x + 550y$ (minimizar)
Restricciones: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 50;\ 2x + y \geq 50;\ 3x + 5y \geq 180$.

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x + y = 50$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 50 \\ \hline y & 50 & 0 \end{array}$ $\quad x + y \leq 50 \Rightarrow y \leq 50 - x$ Semiplano inferior
- $2x + y = 50$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 25 \\ \hline y & 50 & 0 \end{array}$ $\quad 2x + y \geq 50 \Rightarrow y \geq 50 - 2x$ Semiplano superior

- $3x + y = 180$:

x	0	60
y	180	0

$3x + y \geq 180 \Rightarrow y \geq 180 - 3x$ Semiplano superior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
El vértice $\boxed{A(0, 50)}$ ha surgido en una de las tablas de valores. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

$$B: \left.\begin{array}{r} 3x+5y=180 \\ x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3x+5y=180 \\ -3x-3y=-150 \\ \hline 2y=30 \Rightarrow y=15 \end{array} \Rightarrow x + 15 = 50 \Rightarrow x = 35$$

Por tanto: $\boxed{B(35, 50)}$.

$$C: \left.\begin{array}{r} 3x+5y=180 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3x+5y=180 \\ -10x-5y=-250 \\ \hline -7x \quad =-70 \Rightarrow x=10 \end{array} \Rightarrow 20 + y = 50 \Rightarrow y = 30$$

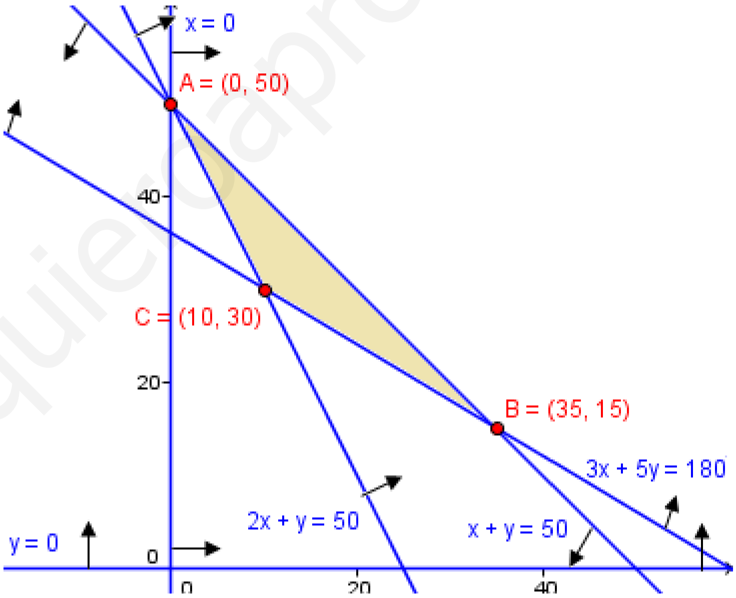
Por tanto: $\boxed{C(10, 30)}$.

Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0, 50) = 350·0 + 550·50 = 27500$

$F(B) = F(35, 15) = 350·35 + 550·15 = 20500$

$F(C) = F(10, 30) = 350·10 + 550·30 = 20000$



De donde deducimos que el menor coste que cumple todas las condiciones se consigue comprando 10 contenedores al mayorista *A* y 30 al *B*, siendo dicho coste de 20000€.

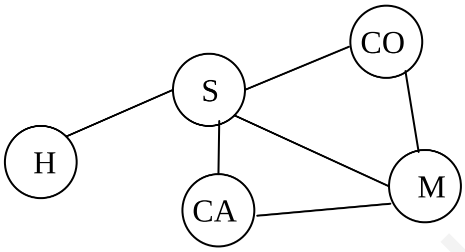
NOMBRE: ____

1) a) Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{array}{r} -4x+ay-2z=3 \\ ax+2y+5z=-3 \\ 5x-8y-z=-3 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo cuando $a = 3$. *(1,5 puntos)*

2) La red de carreteras principales de Andalucía Occidental puede esquematizarse en el siguiente grafo:



Representar la matriz de adyacencia correspondiente. *(1 punto)*

3) Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, siendo A, B y C las matrices: *(3 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

4) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30€ y el de un pantalón es de 50€.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo. *(3 puntos)*

SOLUCIONES

1) a) Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{array}{r} -4x+ay-2z=3 \\ ax+2y+5z=-3 \\ 5x-8y-z=-3 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & a & -2 & 3 \\ a & 2 & 5 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vamos a estudiar el rango de esta matriz por el método de orlar menores. Cuando hay parámetros, el proceso debe hacerse a la inversa que de costumbre. Es decir, en lugar de buscar un menor no nulo cada vez de mayor dimensión, tomamos el menor más grande posible (en este caso, el de la propia matriz de los coeficientes A) y vemos cuándo es nulo y cuándo no lo es.

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & a & -2 \\ a & 2 & 5 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 25a + 16a + 20 + a^2 - 160 = a^2 + 41a - 132$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 + 41a - 132 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-41 \pm \sqrt{1681+528}}{2} =$$

$$= \frac{-41 \pm 47}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-88}{2} = -44 \\ = \frac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Analizamos cada caso:

- $\boxed{\text{Si } a \neq -44 \text{ y } a \neq 3}$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ r(A) = 3 $\Rightarrow$ r(A') = 3, pues ningún menor de A' puede tener más de 3 filas $\Rightarrow$ r(A) = r(A') = nº de incógnitas, por lo que estamos ante un *sistema compatible determinado*, según el *Teorema de Rouché-Fröbenius*.
- $\boxed{\text{Si } a = -44}$, podemos escribir la matriz ampliada exacta, sin desconocer ningún número, que era lo que pasaba al comienzo:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & -44 & -2 & 3 \\ -44 & 2 & 5 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A| = 0$, porque éste valor de a era uno de los dos para los que ocurría esto. De modo que $r(A) = 2$, ya que hay un menor de orden 2 no nulo dentro de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 40 = 38$$

Lo orlamos con la primera fila y la última columna, para conocer el rango de A':

$$\begin{vmatrix} -44 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ -8 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 660 - 48 - 6 + 120 - 12 + 132 = 846 \neq 0$$

por lo que $r(A') = 3$. Como $r(A) \neq r(A')$, es un $\boxed{\textit{sistema incompatible}}$, y no tiene solución.

- Si $a = 3$, la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

de la que sabemos también que $|A| = 0$, como antes. Tenemos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17$. Así que $r(A) = 2$. Lo orlamos en A':

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 24 - 45 - 72 - 30 + 27 + 96 = 0 \Rightarrow r(A') = 2$$

Al ser $r(A) = r(A') <$ nº de incógnitas, tenemos un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

b) Resolverlo cuando $a = 3$. *(1,5 puntos)*

Según el estudio anterior, por el *Teorema de Rouché-Fröbenius*, podemos eliminar la tercera fila de A', porque, al no formar parte del menor principal (el menor no nulo de mayor orden que hemos encontrado), es combinación lineal de las otras dos (su ecuación correspondiente no aporta, por tanto, información adicional). Llamamos $z = t$, siendo t un número fijo libremente escogido por nosotros (ya no es incógnita). Y lo hacemos con z porque tampoco está en el menor principal. Reconstruimos el sistema resultante y pasamos t al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} -4x + 3y = 3 + 2t \\ 3x + 2y = -3 - 5t \end{array}\right\}$$

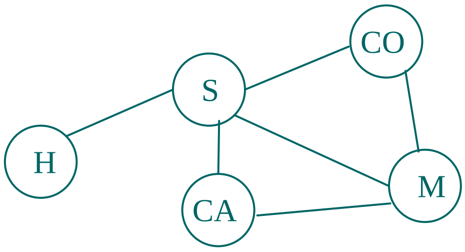
Por *Cramer* (el menor principal está calculado de antes, y vale –17):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+2t & 3 \\ -3-5t & 2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{6 + 4t + 9 + 15t}{-17} = \frac{-19t - 15}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 3+2t \\ 3 & -3-5t \end{vmatrix}}{-17} = \frac{12 + 20t - 9 - 6t}{-17} = \frac{-3 - 14t}{17}$$

Por lo que las infinitas soluciones tienen la estructura: $\boxed{\left(\frac{-19t - 15}{17}, \frac{-3 - 14t}{17}, t \right)}$

2) La red de carreteras principales de Andalucía Occidental puede esquematizarse en el siguiente grafo:



Representar la matriz de adyacencia correspondiente. *(1 punto)*

Es de suponer que las conexiones entre los nodos son de doble sentido. Ponemos un 1 si hay conexión entre el nodo de la fila a la columna correspondientes. Y 0 en caso contrario. Así:

$$\begin{array}{c} \\ H \\ S \\ CA \\ CO \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} H & S & CA & CO & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2{\cdot}X = A - B{\cdot}C$, siendo A, B y C las matrices: *(3 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Si llamamos $D = A^2$ (por comodidad en la notación), la ecuación matricial es la siguiente, donde procedemos a despejar:

$$A^2{\cdot}X = A - B{\cdot}C \Rightarrow D{\cdot}X = A - B{\cdot}C \Rightarrow D^{-1}{\cdot}D{\cdot}X = D^{-1}{\cdot}(A - B{\cdot}C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I{\cdot}D{\cdot}X = D^{-1}{\cdot}(A - B{\cdot}C) \Rightarrow \boxed{X = D^{-1}{\cdot}(A - B{\cdot}C)}$$

donde se ha supuesto que existe D^{-1}. Y, en efecto, como:

$$D = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}.$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|}\mathrm{Adj}(D^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A - B{\cdot}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = D^{-1}{\cdot}(A - B{\cdot}C) = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 1/4 \\ -2 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

4) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros

de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30€ y el de un pantalón es de 50€.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo. *(3 puntos)*
Para elegir las incógnitas, consideramos que lo que nos piden es el número de camisas y de pantalones a confeccionar: C ó P. Llevamos la información del enunciado a la tabla siguiente, añadiendo que no podemos confeccionar un número negativo de ninguno de los dos géneros, resultando:

Tipos de género	Nº de unidades a confeccionar	Tela (m)	Botones (unidades)	Cremalleras (unidades)
C	x	$2x$	$5x$	
P	y	$3y$	$2y$	y
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$2x + 3y \leq 1050$	$5x + 2y \leq 1250$	$y \leq 300$

Función Objetivo: $F(x, y) = 30x + 50y$ (maximizar)
Restricciones: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ 2x + 3y \leq 1050;\ 5x + 2y \leq 1250;\ y \leq 300$.

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

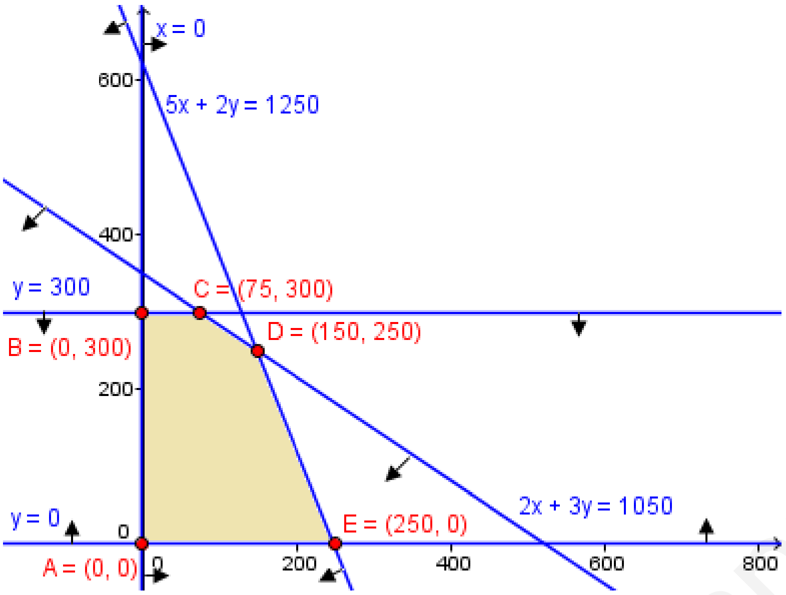
- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $2x + 3y = 1050$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 525 \\ \hline y & 350 & 0 \end{array}$ $2x + 3y \leq 1050 \Rightarrow y \leq (1050 - 2x)/3$
  Semiplano inferior
- $5x + 2y = 1250$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 250 \\ \hline y & 625 & 0 \end{array}$ $5x + 2y \leq 1250 \Rightarrow y \leq (1250 - 5x)/2$
  Semiplano inferior
- $y = 300$: Recta horizontal. $y \leq 300 \Rightarrow$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
Los vértices $\boxed{A(0, 0)}$, $\boxed{B(0, 300)}$ y $\boxed{E(250, 0)}$ han surgido de las tablas de valores o son triviales. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

$$C: \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1050 \\ y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 3 \cdot 300 = 1050 \Rightarrow x = \frac{1050 - 900}{2} = 75 \Rightarrow \boxed{C(75, 300)}.$$

$$D:\ \left.\begin{array}{l}5x+2y=1250\\2x+3y=1050\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}15x+6y=3750\\-4x-6y=-2100\end{array}\right\}\\\hline 11x\qquad =1650 \Rightarrow x=150\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}5\cdot150+2y=1250\Rightarrow\\ y=\dfrac{1250-750}{5}=100\end{array}$$

Por tanto: $\boxed{D(150,\ 100)}$.



Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 0$

$F(B) = F(0, 300) = 30\cdot0 + 50\cdot300 = 15000$

$F(C) = F(75, 300) = 30\cdot75 + 50\cdot300 = 17250$

$F(D) = F(150, 250) = 30\cdot150 + 50\cdot250 = 17000$

$F(E) = F(250, 0) = 30\cdot250 + 50\cdot0 = 7500$

De donde deducimos que el máximo beneficio cumpliendo todas las condiciones se consigue confeccionando 75 camisas y 300 pantalones, siendo dicho beneficio de 17250€.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calcular las matrices X e Y para las que se verifica: *(1,3 puntos)*
   $$X + Y = A \quad \text{y} \quad 3X + Y = B.$$

   b) Hallar la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$. *(1,2 puntos)*

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si hubiese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*
$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}.$$

3) Escribir el siguiente sistema en forma de ecuación matricial y resolver dicha ecuación matricial, diciendo, además, cuál es la solución del sistema: *(2,5 puntos)*
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

4) Una fábrica produce dos tipos de productos: A y B. Se pueden fabricar como máximo 10 unidades de A y 15 de B a la semana, y se dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que la producción de una unidad de A requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada unidad de B necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de productos de cada tipo que deben fabricarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular las matrices X e Y para las que se verifica:

$X + Y = A$ y $3X + Y = B.$ *(1,3 puntos)*

Estamos ante un sistema de ecuaciones matriciales. Vamos a resolverlo por *sustitución*. De la segunda ecuación:

$$3X + Y = B \Rightarrow Y = B - 3X \qquad (1)$$

despeje que se obtendría sumando la matriz $-3X$ en ambos miembros. Sustituimos en la primera ecuación:

$$X + (B - 3X) = A \Rightarrow -2X + B = A \Rightarrow B - A = 2X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -7/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

Sustituimos en la ecuación (1):

$$Y = B - 3X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -7/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 21/2 \\ -21/2 & 9/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -21/2 \\ 11/2 & -5/2 \end{pmatrix}}$$

b) Hallar la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$. *(1,2 puntos)*

$$B \cdot Z + B^t = 2I_2 \Rightarrow B \cdot Z = 2I_2 - B^t \Rightarrow B^{-1}B \cdot Z = B^{-1}(2I_2 - B^t) \Rightarrow \boxed{Z = B^{-1}(2I_2 - B^t)}$$

Calculemos la inversa de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \exists B^{-1}.$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}(B^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$2I_2 - B^t = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$Z = B^{-1}(2I_2 - B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5/2 & 25/2 \end{pmatrix}}$$

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si hubiese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}.$$

Vamos a clasificarlo y resolverlo por el método de Gauss. Escribimos la matriz ampliada y hacemos transformaciones elementales de filas:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangularizado y podemos eliminar la tercera fila por ser toda de 0. Quedan, así, 2 ecuaciones con tres incógnitas, por lo que es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$. Lo reconstruimos para resolverlo:

$$\left.\begin{aligned} x-y-z&=-2 \\ 5y+z&=6 \end{aligned}\right\}$$

Llamamos $z = t$, donde t es un número real libremente escogido por nosotros (hay infinitas posibilidades de hacerlo), y lo pasamos al segundo miembro. Podríamos haber llamado, también $y = t$, pero no deberíamos hacerlo con x porque perderíamos la triangularización. Despejamos en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=-2+t \\ 5y&=6-t \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{6-t}{5}$$

Sustituimos en la primera:

$$x - \frac{6-t}{5} = -2 + t \Rightarrow x = -2 + t + \frac{6-t}{5} = \frac{-10+5t+6-t}{5} = \frac{-4+4t}{5}$$

Así, la estructura de las infinitas soluciones es:

$$\boxed{\left(\frac{-4+4t}{5}, \frac{6-t}{5}, t\right)}$$

Algunas concretas, como nos piden, son:

- $t = 1$: $\boxed{(0, 1, 1)}$
- $t = 6$: $\boxed{(4, 0, 6)}$

3) Escribir el siguiente sistema en forma de ecuación matricial y resolver dicha ecuación matricial, diciendo, además, cuál es la solución del sistema: *(2,5 puntos)*

$$\left\{\begin{aligned} x-2y+3z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 2 \\ 3x+2y-3z &= 2 \end{aligned}\right.$$

La ecuación matricial que se pide es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Llamando A, X y B a las tres matrices de la ecuación, ésta sería: $\boxed{A\cdot X = B}$. Multiplicando por la matriz inversa de A a la *izquierda* (recordar que el producto de matrices no es conmutativo) en ambos miembros, podremos despejar X: $X = A^{-1}B$. De esta manera, precisamos obtener la inversa de A. Vamos a ello. Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 12 + 12 + 9 - 12 - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 12 & -12 & 4 \\ 7 & -8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -3 & 3 & -1 \\ -7/4 & 2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -3 & 3 & -1 \\ -7/4 & 2 & -3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Es, pues, un *sistema compatible determinado*, cuya solución única es $\boxed{(1, -2, -1)}$.

4) Una fábrica produce dos tipos de productos: *A* y *B*. Se pueden fabricar como máximo 10 unidades de *A* y 15 de *B* a la semana, y se dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que la producción de una unidad de *A* requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada unidad de *B* necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de productos de cada tipo que deben fabricarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(2,5 puntos)*

Distribuyendo los datos del enunciado en una tabla, podremos plantear el problema:

Tipos de productos	Nº de unidades a fabricar	Horas / semana	Beneficio
A	x	$4x$	$100x$
B	y	$10y$	$150y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x \leq 10$; $y \leq 15$	$4x + 10y \leq 160$	$F(x, y) = 100x + 150y$

Es decir, hemos de *maximizar* la *función objetivo*: $F(x, y) = 100x + 150y$
con las *restricciones*: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 10$; $y \leq 15$; $4x + 10y \leq 160$.

Para dibujar la región factible, cambiamos en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Para las rectas verticales, cuyas ecuaciones tienen la forma x = *número*, los semiplanos que verifican las inecuaciones correspondientes quedarán a izquierda de la recta (si la inecuación es $x \leq$ *número*) o a derecha (si $x \geq$ *número*). Así:

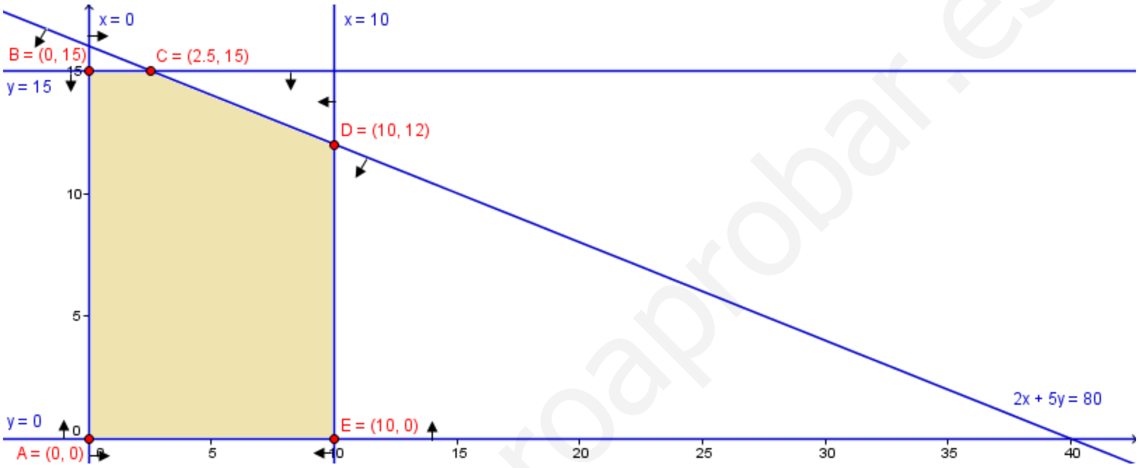
- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 10$: A la izquierda de $x = 10$.
- $y \leq 15$: Por debajo de $y = 15$.

- $4x + 10y = 160$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 40 \\ \hline y & 16 & 0 \end{array}$ $4x + 10y \leq 160 \Rightarrow y \leq -0{,}4x + 16$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

Los vértices $\boxed{A(0,\ 0)}$, $\boxed{B(0,\ 15)}$ y $\boxed{E(10,\ 0)}$ han surgido de las tablas de valores o son triviales. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

- C: $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=80 \\ y&=15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x + 5\cdot 15 = 80 \Rightarrow x = \dfrac{80-75}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \boxed{C(2.5,\ 15)}$.
- D: $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=80 \\ x&=10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow y = \dfrac{80-20}{5} = 12 \Rightarrow \boxed{D(10,\ 12)}$.



Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0,\ 0) = 100\cdot 0 + 150\cdot 0 = 0$

$F(B) = F(0,\ 15) = 100\cdot 0 + 150\cdot 15 = 2250$

$F(C) = F(2.5,\ 15) = 100\cdot 2.5 + 150\cdot 15 = 2500$

$F(D) = F(10,\ 12) = 100\cdot 10 + 150\cdot 12 = 2800$

$F(E) = F(10,\ 0) = 100\cdot 10 + 150\cdot 0 = 1000$

Por tanto, el beneficio máximo es de 2800€ y se obtiene fabricando 10 unidades de A y 12 de B.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**
Primer trimestre – Examen Global – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Calcular las matrices X e Y para las que se verifica:
   $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$. *(1,3 puntos)*

   b) Hallar la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$. *(1,2 puntos)*

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si hubiese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + 5y + z = 17 \end{array}\right\}$$

3) Escribir el siguiente sistema en forma de ecuación matricial y resolver dicha ecuación matricial, diciendo, además, cuál es la solución del sistema: *(2,5 puntos)*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \end{cases}.$$

4) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calcular las matrices X e Y para las que se verifica:

$2X - Y = A$ y $X - 3Y = B.$ *(1,3 puntos)*

Estamos ante un sistema de ecuaciones matriciales. Vamos a resolverlo por *sustitución*. De la segunda ecuación:

$$2X - Y = A \Rightarrow Y = 2X - A \qquad (1)$$

despeje que se obtendría sumando la matriz Y y la matriz $-A$ en ambos miembros, y escribiendo primero el segundo miembro resultante y después el primero. Sustituimos en la primera ecuación:

$$X - 3(2X - A) = B \Rightarrow -5X + 3A = B \Rightarrow 3A - B = 5X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{5}(3A - B) = \frac{1}{5}\left[3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Sustituimos en la ecuación (1):

$$Y = 2X - A = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Hallar la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$. *(1,2 puntos)*

$$B \cdot Z + B^t = 2I_2 \Rightarrow B \cdot Z = 2I_2 - B^t \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot Z = B^{-1} \cdot (2I_2 - B^t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = B^{-1} \cdot (2I_2 - B^t)}$$

Calculemos la inversa de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = -31 \neq 0 \;\; \exists B^{-1}.$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}(B^t) = -\frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/31 & -4/31 \\ -9/31 & -1/31 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$2I_2 - B^t = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$Z = B^{-1}(2I_2 - B^t) = \begin{pmatrix} -5/31 & -4/31 \\ -9/31 & -1/31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -21/31 & -33/31 \\ -13/31 & -78/31 \end{pmatrix}}$$

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si hubiese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + 5y + z = 17 \end{array}\right\}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la última fila completa de 0, la eliminamos. Quedan, entonces, 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que estamos ante un **<u>sistema compatible indeterminado</u>**. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y-3z &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Llamamos $z = t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea x, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= -t \\ y &= 17+3t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2^{a}ec: \quad y = 17+3t \\ &1^{a}ec: \quad x+17+3t = -t \Rightarrow x = -17-3t-t = -17-4t \end{aligned}$$

La forma de las infinitas soluciones es, entonces: $\boxed{(-17-4t,\ 17+3t,\ t)}$

Nos piden dos soluciones concretas:

- $t = 0 \;\Rightarrow\; (-17, 17, 0)$
- $t = 1 \;\Rightarrow\; (-21, 20, 1)$

3) Escribir el siguiente sistema en forma de ecuación matricial y resolver dicha ecuación matricial, diciendo, además, cuál es la solución del sistema: *(2,5 puntos)*

$$\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ 2x-y+2z = 2 \\ 3x+2y-3z = 2 \end{cases}$$

La ecuación matricial que se pide es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Llamando A, X y B a las tres matrices de la ecuación, ésta sería: $\boxed{A \cdot X = B}$. Multiplicando por la matriz inversa de A a la *izquierda* (recordar que el producto de matrices no es conmutativo) en ambos miembros, podremos despejar X: $X = A^{-1}B$. De esta manera, precisamos obtener la inversa de A. Vamos a ello. Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 12 + 12 + 9 - 12 - 4 = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 12 & -12 & 4 \\ 7 & -8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -3 & 3 & -1 \\ -7/4 & 2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -3 & 3 & -1 \\ -7/4 & 2 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Es, pues, un *sistema compatible determinado*, cuya solución única es $\boxed{(1, -2, -1)}$.

4) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(2,5 puntos)*

Distribuyendo los datos del enunciado en una tabla, podremos plantear el problema:

Tipos de ordenadores	Nº de unidades a fabricar	Horas / semana	Beneficio
A (fijos)	x	$4x$	$100x$
B (portátiles)	y	$10y$	$150y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $x \leq 10;\ y \leq 15$	$4x + 10y \leq 160$	$F(x, y) = 100x + 150y$

Es decir, hemos de *maximizar* la *función objetivo*: $F(x, y) = 100x + 150y$
con las *restricciones*: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 10$; $y \leq 15$; $4x + 10y \leq 160$.

Para dibujar la región factible, cambiamos en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Para las rectas verticales, cuyas ecuaciones tienen la forma $x =$ *número*, los semiplanos que verifican las inecuaciones correspondientes quedarán a izquierda de la recta (si la inecuación es $x \leq$ *número*) o a derecha (si $x \geq$ *número*). Así:

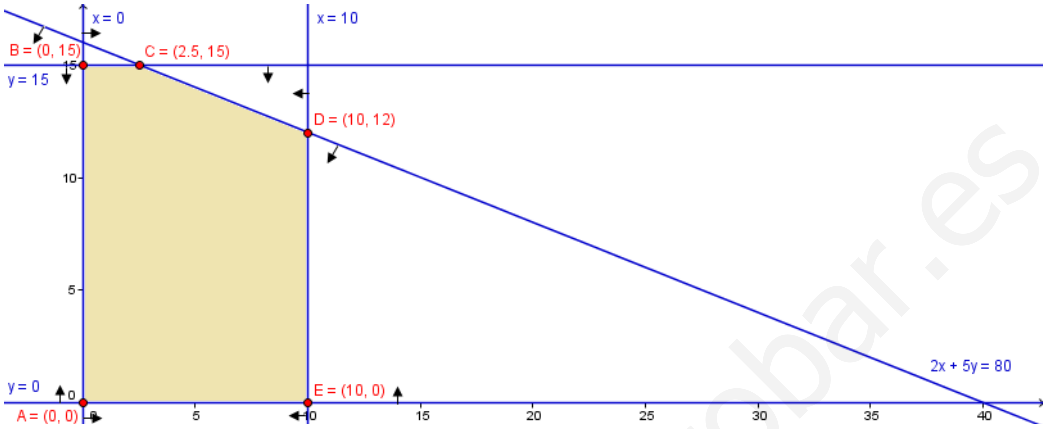
- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 10$: A la izquierda de $x = 10$.
- $y \leq 15$: Por debajo de $y = 15$.

- $4x + 10y = 160$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 40 \\ \hline y & 16 & 0 \end{array}$ $4x + 10y \leq 160 \Rightarrow y \leq -0{,}4x + 16$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

Los vértices $\boxed{A(0, 0)}$, $\boxed{B(0, 15)}$ y $\boxed{E(10, 0)}$ han surgido de las tablas de valores o son triviales. Los demás los tenemos que hallar resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones de las rectas que los definen (nunca se pueden deducir del gráfico):

- C: $\left.\begin{matrix} 2x+5y=80 \\ y=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x + 5\cdot 15 = 80 \Rightarrow x = \dfrac{80-75}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \boxed{C(2.5,\ 15)}$.
- D: $\left.\begin{matrix} 2x+5y=80 \\ x=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow y = \dfrac{80-20}{5} = 12 \Rightarrow \boxed{D(10,\ 12)}$.



Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 100\cdot 0 + 150\cdot 0 = 0$
$F(B) = F(0, 15) = 100\cdot 0 + 150\cdot 15 = 2250$
$F(C) = F(2.5, 15) = 100\cdot 2.5 + 150\cdot 15 = 2500$
$F(D) = F(10, 12) = 100\cdot 10 + 150\cdot 12 = 2800$
$F(E) = F(10, 0) = 100\cdot 10 + 150\cdot 0 = 1000$

Así, el beneficio máximo es de 2800€ y se obtiene fabricando 10 fijos y 12 portátiles.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Consideremos la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Realizar las operaciones hasta obtener una igualdad entre dos matrices. *(0,5 ptos)*
b) Igualar cada posición de la matriz final del primer miembro con la del segundo, hasta formar un sistema de ecuaciones, clasificarlo y resolverlo. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas. *(2 puntos)*

2) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en casa afirmativo, resuélvala. *(2,5 puntos)*

3) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20€. Para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35€. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes. *(3 puntos)*

4) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A. *(1 punto)*
b) Para $x = 3$, calcule, si es posible, A^{-1}. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Consideremos la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Realizar las operaciones hasta obtener una igualdad entre dos matrices. *(0,5 ptos)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x+3y+2z \\ -3x+2y+5z \\ -5x+9y+17z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4x+3y+2z-4 \\ -3x+2y+5z-8 \\ -5x+9y+17z-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es una igualdad entre dos matrices de dimensión 3 x 1.

b) Igualar cada posición de la matriz final del primer miembro con la del segundo, hasta formar un sistema de ecuaciones, clasificarlo y resolverlo. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas. *(2 puntos)*

El sistema que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+\ \ 2z-4=0 \\ -3x+2y+\ \ 5z-8=0 \\ -5x+9y+17z-28=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+\ \ 2z=4 \\ -3x+2y+\ \ 5z=8 \\ -5x+9y+17z=28 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos por Gauss.

Escribimos la matriz ampliada y aplicamos las transformaciones lineales de filas que indicamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ -5 & 9 & 17 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -17x\quad\ +11z=16 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con y, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4-2t \\ -17x\quad\ =16-11t \end{array}\right\} \Rightarrow (2^{a}\text{ ec.}):\ x=\frac{16-11t}{-17}=\frac{-16+11t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 1ª ec:

$$4\frac{-16+11t}{17}+3y=4-2t \Rightarrow 4(-16+11t)+51y=68-34t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -64+44t+51y=68-34t\ \Rightarrow\ 51t=68+64-34t-44t\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ y=\frac{132-78t}{51}=\frac{44-26t}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{-16+11t}{17},\frac{44-26t}{17},t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: (1, –2, 3)
- $t = 0$: (–16/17, 44/17, 0)

2) Siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial $A\cdot X=B$ y, en casa afirmativo, resuélvala. *(2,5 puntos)*

Para poder despejar X, hemos de aislarla en el primer miembro, multiplicando a la izquierda (recordar que el producto de matrices no es conmutativo, en general) por la *inversa* de A:

$$A\cdot X=B\ \Rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \Rightarrow\ I_3\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \Rightarrow\ \boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

donde I_3 es la *matriz unidad*, de orden 3 en este caso. Este despeje sólo es posible si existe A^{-1}, lo que ocurre si, y sólo si $|A|\neq 0$. De modo que hemos de calcular dicho determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1\neq 0\ \Rightarrow\boxed{\exists\ A^{-1}}$$

Procedemos a calcularla:

$$A^t=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ \mathrm{Adj}(A^t)=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

donde la matriz adjunta de la traspuesta de A proviene de sustituir cada elemento por su adjunto, el cual es el determinante que resulta de eliminar la fila y columna de dicho elemento, multiplicado posteriormente por 1 ó –1, según la posición del elemento en cuestión, a saber, según el siguiente esquema:

$$\begin{vmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{vmatrix}$$

Ya podemos hallar X:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\\1&0\end{pmatrix}}$$

3) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería

de 1 estante, siendo su precio de venta 20€. Para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35€. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes. *(3 puntos)*

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de librerías	Nº de unidades a fabricar	kg de madera	PVP
A (1 estante)	x	$4x$	$20x$
B (3 estantes)	y	$8y$	$35y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x \leq 120$; $y \leq 70$	$4x + 8y \leq 600$	$F(x, y) = 20x + 35y$

Expliquemos detalladamente qué hemos hecho.

Si se fabrican x librerías tipo A y cada una consume 4 kg de madera, la madera consumida por el total de librerías fabricadas de ese tipo es $4x$. Análogo para B. Como el total de madera disponible es de 600 kg, que no puede, pues, sobrepasarse, llegamos a la restricción $4x + 8y \leq 600$.

De igual forma, si el precio de cada una del tipo A son 20€, se ingresarán en total $20x$ por todas las fabricadas de tal tipo. Análogo para B. De donde el total de ingresos es $F(x, y) = 20x + 35y$, que constituye la *función objetivo*, que hay que maximizar.

Por otra parte, no se puede fabricar un número negativo de estanterías de ninguno de los dos tipos, de donde surgen que exijamos que $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como no pueden fabricarse más de 120 unidades de A, concluimos que $x \leq 120$. Análogo para $y \leq 70$.

Y, así, el problema es maximizar $F(x, y) = 20x + 35y$ sujeto a que: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 120$; $y \leq 70$; $4x + 8y \leq 600$.

Dibujamos el recinto delimitado por las restricciones (*región factible*).

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa.

Para $x \geq 0$ resulta la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Similar ocurre con $x \leq 120$, que es el semiplano que queda a la izquierda de la recta vertical $x = 120$, y con $y \leq 70$, que nos da el semiplano inferior a la recta horizontal $y = 70$.

Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 120$: A la derecha de $x = 120$.
- $y \leq 70$: Por debajo de $y = 70$.
- $4x + 8y = 600$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 150 \\ \hline y & 75 & 0 \end{array}$ $4x + 8y \leq 600 \Rightarrow y \leq \dfrac{-4x+600}{8}$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

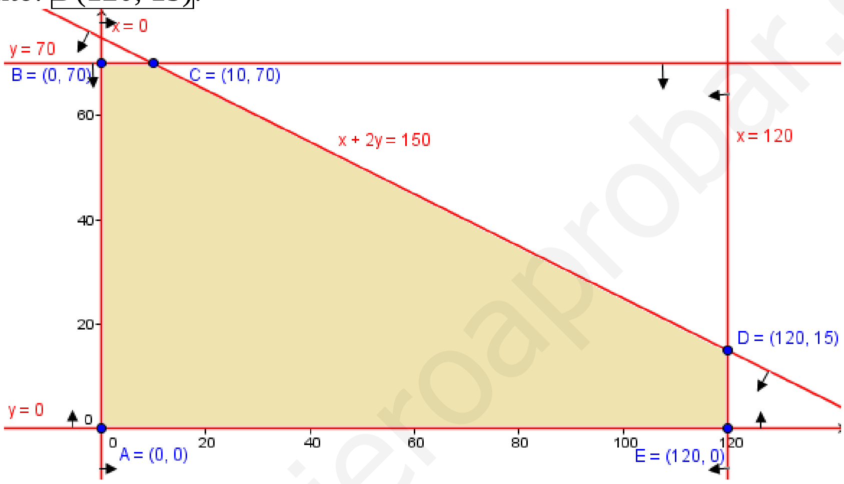
Los vértices $\boxed{A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 70)\ \text{ y }\ E(120,\ 0)}$ son triviales. Calculemos el resto de ellos (nunca se pueden deducir del gráfico), para lo cual hemos simplificado la ecuación $4x + 8y = 600$ entre 4: $x + 2y = 150$:

C: $\left.\begin{array}{r} x+2y=150 \\ y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $x + 140 = 150 \Rightarrow x = 10$

Por tanto: $\boxed{C(10,\ 70)}$.

D: $\left.\begin{array}{l} x+2y=150 \\ x\qquad =120 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $120 + 2y = 150 \Rightarrow y = 15$

Por tanto: $\boxed{D(120,\ 15)}$.



Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice del recinto, obteniendo así dónde se alcanza su máximo y mínimo restringida a la *región factible*. Si alguno de ellos estuviese en dos vértices consecutivos, el máximo o mínimo correspondiente estaría en dichos vértices y en los infinitos puntos del segmento que los une:

$F(A) = F(0,\ 0) = 20\cdot 0 + 35\cdot 0 = 0$

$F(B) = F(0,\ 70) = 20\cdot 0 + 35\cdot 70 = 2450$

$F(C) = F(10,\ 70) = 20\cdot 10 + 35\cdot 70 = 2650$

$F(D) = F(120,\ 15) = 20\cdot 120 + 35\cdot 15 = 2925$

$F(E) = F(120,\ 0) = 20\cdot 120 + 35\cdot 0 = 2400$

Concluimos, pues, que:

Los ingresos máximos posibles son de 2925€, que se obtienen con 120 librerías de 1 estante y 15 de 3 estantes.

4) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A. *(1 punto)*
La inversa de una matriz existe si, y sólo si su determinante no es nulo. Lo calculamos y vemos cuándo se hace 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x + x - x = x^2 - x = x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\textit{no existe la inversa de A si, y sólo si } x = 0 \text{ ó } x = 1}$.

b) Para $x = 3$, calcule, si es posible, A^{-1}. *(1 punto)*

De acuerdo con el resultado previo, si es posible el cálculo.

$$|A| = 3(3-1) = 6$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Consideremos la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -3 & -15 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Realizar las operaciones hasta obtener una igualdad entre dos matrices. *(0,5 ptos)*

b) Igualar cada posición de la matriz final del primer miembro con la del segundo, hasta formar un sistema de ecuaciones, clasificarlo y resolverlo. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas. *(2 puntos)*

2) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $A \cdot X - 2B = C$, siendo: *(2,5 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 24000€ y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje. La contratación de uno del tipo B cuesta 6000€ y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo? *(3 puntos)*

4) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A. *(1 punto)*

b) Para $x = -3$, calcule, si es posible, A^{-1}. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Consideremos la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -3 & -15 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Realizar las operaciones hasta obtener una igualdad entre dos matrices. *(0,5 ptos)*

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -3 & -15 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4x-3y+2z \\ -3x+2y+5z \\ -3x-15y-9z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4x-3y+2z \\ -3x+2y+5z \\ -3x-15y-9z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4x-3y+2z-8 \\ -3x+2y+5z-8 \\ -3x-15y-9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es una igualdad entre dos matrices de dimensión 3 x 1.

b) Igualar cada posición de la matriz final del primer miembro con la del segundo, hasta formar un sistema de ecuaciones, clasificarlo y resolverlo. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas. *(2 puntos)*

El sistema que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{r} -4x-3y+2z-8=0 \\ -3x+2y+5z-8=0 \\ -3x-15y-9z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -4x-3y+2z=8 \\ -3x+2y+5z=8 \\ -3x-15y-9z=0 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos por Gauss.

Escribimos la matriz ampliada y aplicamos las transformaciones lineales de filas que indicamos:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 & 8 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ -3 & -15 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{3F_1-4F_2} \begin{pmatrix} 0 & -17 & -14 & -8 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -17 & -14 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -17 & -14 & -8 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **<u>sistema compatible indeterminado</u>**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{array}{r} -17y-14z=-8 \\ -3x+2y+5z=8 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $y = t$, pero no deberíamos hacerlo con x, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{array}{r} -17y=14t-8 \\ -3x+2y=-5t+8 \end{array}\right\} \Rightarrow (1^{a}\text{ ec.}):\ y = \frac{-8+14t}{-17} = \frac{8-14t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 2ª ec:

$$-3x+2\frac{8-14t}{17}=-5t+8 \Rightarrow 2\frac{8-14t}{17}+5t-8=3x \Rightarrow$$

$$3x=\frac{16-28t+85t-136}{17}=\frac{57t-120}{17} \Rightarrow x=\frac{19t-40}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{19t-40}{17}, \frac{-14t+8}{17}, t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: (1, –2, 3)
- $t = 20$: (20, –16, 20)

2) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $A \cdot X - 2B = C$, siendo: *(2,5 puntos)*

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$$

Para poder despejar X, hemos de aislarla en el primer miembro, lo que va a requerir sumar en ambos miembros la matriz $2B$, para que desparezca del primero, y multiplicar, a continuación, a la izquierda (recordar que el producto de matrices no es conmutativo, en general) por la *inversa* de A:

$$A \cdot X - 2B = C \Rightarrow A \cdot X = C + 2B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C + 2B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot (C + 2B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C + 2B)$$

donde I_3 es la *matriz unidad*, de orden 3 en este caso. Este despeje sólo es posible si existe A^{-1}, lo que ocurre si, y sólo si $|A| \neq 0$. De modo que hemos de calcular dicho determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 - 1 + 2 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow \boxed{\exists A^{-1}}$$

Procedemos a calcularla:

$$A^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

donde la matriz adjunta de la traspuesta de A proviene de sustituir cada elemento por su adjunto, el cual es el determinante que resulta de eliminar la fila y columna de dicho elemento, multiplicado posteriormente por 1 ó –1, según la posición del elemento en cuestión, a saber, según el siguiente esquema:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

Por otro lado, $C + 2B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ya podemos hallar X:

$$X = A^{-1}\cdot(C + 2B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

3) Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 24000€ y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje. La contratación de uno del tipo B cuesta 6000€ y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo? *(3 puntos)*

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de aviones	Nº de aviones a contratar	Personas	Tm de equipaje	Precio
A	x	$200x$	$6x$	$24000x$
B	y	$100y$	$15y$	$6000y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x \leq 11$; $y \leq 8$	$200x + 100y \geq 1600$	$6x + 15y \geq 96$	$F(x, y) = 24000x + 6000y$

Expliquemos detalladamente qué hemos hecho.

Si se contratan x aviones tipo A y cada uno puede transportar 200 personas, podremos transportar, en total, $200x$ personas como máximo. Análogo para B. Como hay que transportar a 1600 personas, la capacidad entre todos los aviones debe ser, al menos, dicha cantidad, de donde llegamos a la restricción $200x + 100y \geq 1600$.

Algo parecido sucede con el peso de equipaje a transportar: en total debe cubrir, como mínimo, nuestras necesidades, por lo que: $6x + 15y \geq 96$.

De igual forma, si el precio de cada uno del tipo A son 24000€, costarán todos los de dicho tipo, en total, $24000x$. Análogo para B. De donde el precio total es $F(x, y) = 24000x + 6000y$, que constituye la *función objetivo*, que hay que minimizar.

Por otra parte, no se puede contratar un número negativo de aviones de ninguno de los dos tipos, de donde surgen que exijamos que $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Y sólo hay disponibles 11 aviones A y 8 tipo B, por lo que concluimos que $x \leq 11$ e $y \leq 8$.

Simplificamos $200x + 100y \geq 1600$ entre 100, y $6x + 15y \geq 96$ entre 3.

Y, así, el problema es minimizar $F(x, y) = 24000x + 6000y$ sujeto a que: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 11$; $y \leq 8$; $2x + y \geq 16$; $2x + 5y \geq 32$

Dibujamos el recinto delimitado por las restricciones (*región factible*).

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan

debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa.
Para $x \geq 0$ resulta la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Similar ocurre con $x \leq 11$, que es el semiplano que queda a la izquierda de la recta vertical $x = 11$, y con $y \leq 8$, que nos da el semiplano inferior a la recta horizontal $y = 8$.
Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 11$: A la derecha de $x = 11$.
- $y \leq 8$: Por debajo de $y = 8$.
- $2x + y = 16$:

x	0	8
y	16	0

Además, como $2x + y \geq 16 \Rightarrow y \geq -2x + 16$,

Nos interesa el semiplano superior

- $2x + 5y = 32$:

x	0	16
y	32/5	0

Además, como $2x + 5y \geq 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq \dfrac{-2x+32}{5}$, por lo que nos interesa el semiplano superior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).
El vértice $\boxed{B(11, 8)}$ es trivial. Calculemos el resto de ellos (nunca se pueden deducir del gráfico).

A: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=16 \\ y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $2x + 8 = 16 \Rightarrow x = 4$

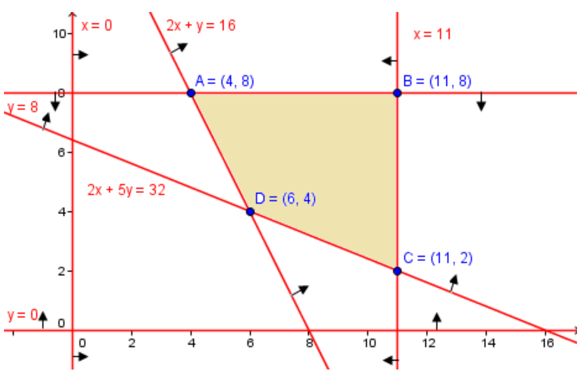
Por tanto: $\boxed{A(4, 8)}$.

C: $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=32 \\ x=11 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $22 + 5y = 32 \Rightarrow x = 2$

Por tanto: $\boxed{C(11, 2)}$.

D: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=16 \\ 2x+5y=32 \end{array}\right\} \Rightarrow$Restando: $4y = 16 \Rightarrow y = 4$. Sust. en la 1ª: $2x + 4 = 16 \Rightarrow x = 6$

Por tanto: $\boxed{D(6, 4)}$.



Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice del recinto, obteniendo así dónde se alcanza su máximo y mínimo restringida a la *región factible*. Si alguno de ellos estuviese en dos vértices consecutivos, el máximo o mínimo correspondiente estaría en dichos vértices y en los infinitos puntos del segmento que los une:

$F(A) = F(4, 8) = 24000 \cdot 4 + 6000 \cdot 8 = 144000$
$F(B) = F(11, 8) = 24000 \cdot 11 + 6000 \cdot 8 = 312000$

$F(C) = F(11, 2) = 24000 \cdot 11 + 6000 \cdot 2 = 276000$
$F(D) = F(6, 4) = 24000 \cdot 6 + 6000 \cdot 4 = 168000$

Concluimos, pues, que:

El mínimo gasto es de 144000€, que se obtienen con 4 aviones tipo A y 8 aviones tipo B.

4) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A. *(1 punto)*

La inversa de una matriz existe si, y sólo si su determinante no es nulo. Lo calculamos y vemos cuándo se hace 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = 0 + x^2 - x + 2x - 0 - 2x = x^2 - x = x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, *no existe la inversa de A si, y sólo si* $x = 0$ *ó* $x = 1$.

b) Para $x = -3$, calcule, si es posible, A^{-1}. *(1 punto)*

De acuerdo con el resultado previo, si es posible el cálculo.

$$|A| = -3(-3-1) = 12$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/12 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 5/4 & 7/12 \end{pmatrix}}$$