

Integrales

1. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{i) } \int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ii) } \int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}} \quad \text{iii) } \int x \operatorname{sen} x^2 dx$$

Solución:

i) Operando se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{5/2} + 5x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2x^{-1/2}) dx = \\ &= \frac{2}{7} x^{7/2} + 5 \frac{2}{5} x^{5/2} - 3 \frac{2}{3} x^{3/2} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c = \left(\frac{2}{7} x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \right) x^{1/2} + c \end{aligned}$$

ii) Ajustando constantes se tiene:

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}} = \int \frac{6dx}{2\sqrt{6x+1}} = \sqrt{6x+1} + c$$

iii) Haciendo el cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$, se tendrá:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} t dt = -\frac{1}{2} \cos t + c = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

2. Calcule las siguientes integrales

$$\text{i) } \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} dx \quad \text{ii) } \int \frac{e^{2x} + x}{\sqrt{e^{2x} + x^2 + 5}} dx \quad \text{iii) } \int \frac{3x^3 + 8x^2 + 1}{3x-1} dx$$

Solución:

$$\text{i) } \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $\sqrt{3x} = t \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x}} dx = \frac{2}{3} dt$.

$$\text{Sustituyendo: } \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} dx = \int \frac{2}{3} \operatorname{sen} t dt = -\frac{2}{3} \cos t + c = -\frac{2}{3} \cos \sqrt{3x} + c$$

$$\text{i) } \int \frac{e^{2x} + x}{\sqrt{e^{2x} + x^2 + 5}} dx = \int \frac{2e^{2x} + 2x}{2\sqrt{e^{2x} + x^2 + 5}} dx = \left(\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx \right) = \sqrt{e^{2x} + x^2 + 5} + c$$

$$\text{ii) Dividiendo: } \frac{3x^3 + 8x^2 + 1}{3x-1} = x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x-1}$$

Luego:

$$\int \frac{3x^3 + 8x^2 + 1}{3x-1} dx = \int \left(x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x-1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + \frac{2}{3} \ln(3x-1) + c$$

3. Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = a \quad \text{b) } \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = 3 \quad \text{c) } \int_0^3 \frac{1}{x+a} dx = 5.$$

Solución:

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = a \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^3 = \ln 4 = a$$

$$\text{b) } \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = 3 \Rightarrow \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^a = \ln(a+1) = 3 \Rightarrow a+1 = e^3 \Rightarrow a = e^3 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^3 \frac{1}{x+a} dx = 5 &\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+a} dx = [\ln(x+a)]_0^3 = \ln(3+a) - \ln a = 5 \Rightarrow \ln \frac{3+a}{a} = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{3+a}{a} = e^5 \Rightarrow 3+a = ae^5 \Rightarrow a(e^5 - 1) = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{e^5 - 1} \end{aligned}$$

4. Calcular la integral definida $\int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx$

Solución:

Para valores negativos de x , el valor absoluto de x , $|x| = -x$; para valores positivos de x , $|x| = x$. Si además aplicamos las propiedades de la integral definida, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx &= \int_{-1}^0 (|x| + x + 1) dx + \int_0^1 (|x| + x + 1) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-x + x + 1) dx + \int_0^1 (x + x + 1) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 (2x + 1) dx = \\ &= x \Big|_{-1}^0 + (x^2 + x) \Big|_0^1 = -(-1) + (1 + 1) = 3 \end{aligned}$$

5. Encontrar la función cuya segunda derivada es la constante 2, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto (1, 2).

Solución:

Datos: $f''(x) = 2$; $f'(1) = 0 \rightarrow$ en $x = 1$ se da un mínimo; $f(1) = 2$: la función pasa por (1, 2).

Integrando la segunda derivada se obtiene la primera.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2 dx \Rightarrow f'(x) = 2x + c$$

Como $f'(1) = 0$ se tendrá que: $f'(1) = 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$. Luego $f'(x) = 2x - 2$

Integrando $f'(x)$ se obtiene $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 2) dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{1} - 2x + k$$

Como $f(1) = 2$ se tendrá que: $f(1) = k = 1 \Rightarrow k = 3$.

Luego, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

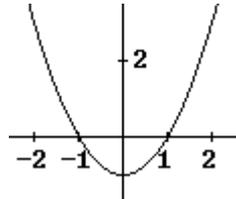
6. La derivada de cierta función f es $f'(x) = x^2 - 1$.

(a) Representar gráficamente f' y deducir de esa gráfica los intervalos de crecimiento y concavidad de f .

(b) Hallar f sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

(a) La función $f'(x) = x^2 - 1$ es una parábola. Su gráfica se obtiene dando valores y es la siguiente.



Se observa que:

si $x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

si $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

si $x > 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Además, $f'(x)$ es decreciente si $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$.

Por tanto,

si $x < 0$, f'' será negativa y f cóncava (\cap)

si $x > 0$, $f'' > 0$ y f convexa (\cup)

En $x = 0$ se tendrá un punto de inflexión.

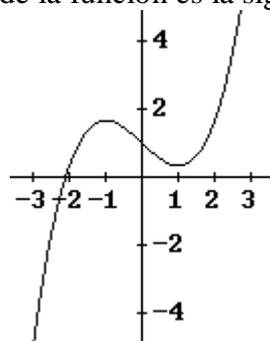
(b) Integrando $f'(x)$ se obtiene $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 1) dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x + k$$

Como $f(0) = 1$ se tendrá que: $f(0) = k = 1$.

$$\text{Luego, } f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 1$$

Nota: Aunque no se pide, la gráfica de la función es la siguiente



7. Sea considera la función $f(x) = xe^{x^2}$.

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

Solución:

(a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Si $f(x) = xe^{x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$; luego $f(1) = e$; $f'(1) = 3e$

De donde la tangente será:

$$y - e = 3e(x - 1) \Rightarrow y = 3ex - 2e$$

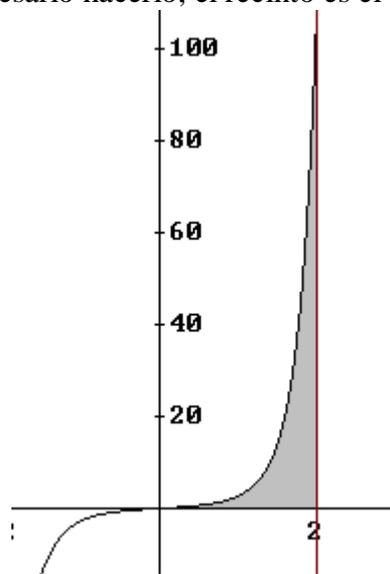
(b) Como la función es positiva en el intervalo considerado, el área pedida viene dada por el valor de la integral

$$\int_0^2 xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

NOTAS:

1. Esta integral es inmediata, no obstante podría hacerse el cambio $x^2 = t$.

2. Aunque no se pide, ni es necesario hacerlo, el recinto es el sombreado en la siguiente figura:



8. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^2 - x - 6$.

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.

c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$

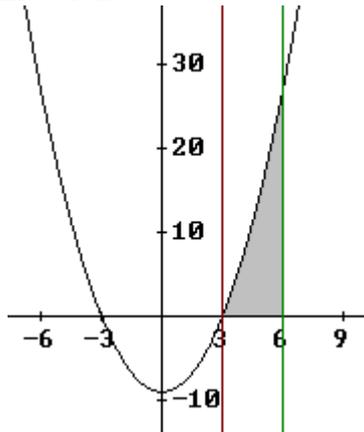
b) La función $g(x)$ es una parábola de eje vertical: tendrá un mínimo, pues el coeficiente de x^2 es positivo.

Por derivadas:

$$g(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

Como $g''(x) = 2 > 0$, en $x = 1/2$ se tiene un mínimo. Su valor es $g(1/2) = -25/4$

c) El recinto es el dibujado a continuación.



El área vale:

$$A = \int_3^6 (x^2 - 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_3^6 = 18 - (-18) = 36$$

9. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$

- Determinense a , b y c , sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$.
- Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto $(-2, -3)$.
- Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

(a) Por $f(-2) = -3 \Rightarrow 4 - 2a + b = -3$

Por $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$

De ambas ecuaciones se deduce que: $a = 2$ y $b = -3$

Por $g(1) = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$.

Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = -x^2 + 1$

(b) La tangente es: $y - g(-2) = g'(-2)(x + 2)$

Como $g'(x) = -2x \rightarrow g'(-2) = 4$

Por tanto, la ecuación de la tangente será:

$$y + 3 = 4(x + 2) \Rightarrow y = 4x + 5$$

(c) La situación gráfica es la siguiente.

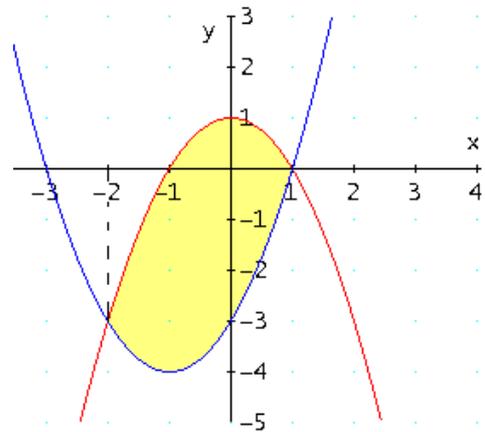
Las curvas se cortan en $x = -2$ y $x = 1$, solución de la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = -x^2 + 1$$

El área es la zona sombreada, que vale:

$$A = \int_{-2}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{2}{3} + 4 - 1 - \left(\frac{16}{3} - 8 - 4 \right) = 9$$



10. Sea la función dependiente de los parámetros a y b :

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Hállense los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto \mathbf{R} de números reales.
- Representétese gráficamente para los valores $a = 0$ y $b = 3$.
- Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) En $x = 0$:

$$\text{si } x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -a$$

$$\text{si } x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow -1 \Rightarrow a = 1$$

En $x = 2$:

$$\text{si } x \rightarrow 2^-, f(x) \rightarrow 1$$

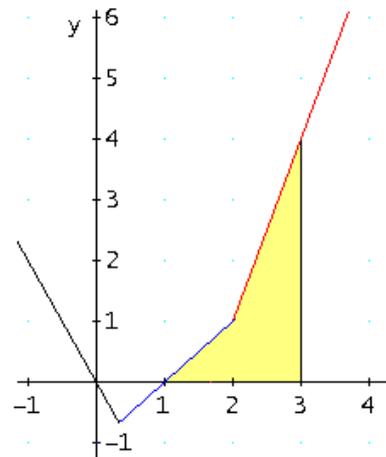
$$\text{si } x \rightarrow 2^+, f(x) \rightarrow 2b - 5 \Rightarrow b = 3.$$

b) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$ la función es $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Su gráfica es la adjunta.

c) El área es la de la región sombreada en la figura.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^3 (3x-5)dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x \right]_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \end{aligned}$$



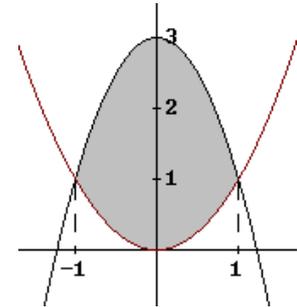
11. Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

Solución:

La región es la sombreada en la siguiente figura.

Las curvas se cortan en los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$$



Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2 + 3$ en el intervalo $(-1, 1)$, el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx = (-x^3 + 3x) \Big|_{-1}^1 = 2 - (-2) = 4$$

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 + 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Representa gráficamente f .

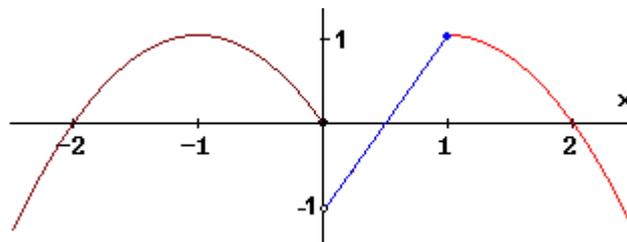
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$

Solución:

a) Es una función definida a trozos, compuesta por dos trozos de parábola y un trozo de recta. Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	0,1	0,5	1	1,1	2	3	4
f(x)	-3	0	1	0	-0,8	0	1	0,99	0	-3	-8

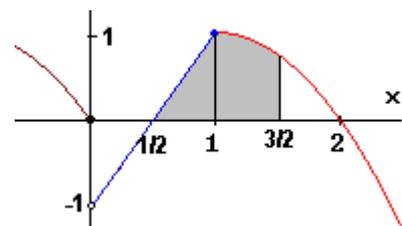
Se obtiene la figura:



b) El área pedida es la sombreada en la figura adjunta.

Su valor es:

$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2) dx + A(\text{triángulo}) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{1}{3} - 4 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \frac{9}{2} = \frac{37}{6}$$



13. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 8x$ y el eje de abscisas.

Solución:

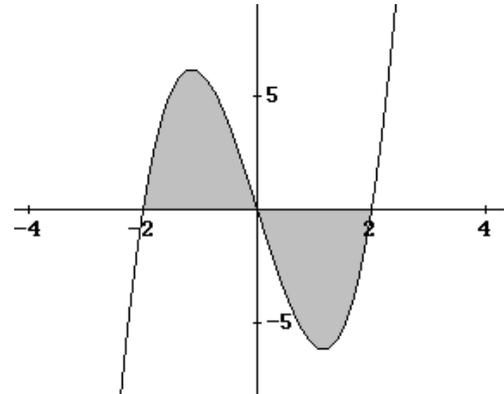
El recinto es el sombreado en la siguiente figura.

Para representarla observamos que:

- corta al eje OX en los puntos $x = -2, 0$ y 2 ,
soluciones de $2x^3 - 8x = 0$
- tiene máximos o mínimos cuando $y' = 6x^2 - 8 = 0$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- la función es impar.
- dando algunos valores se obtiene la gráfica.



El área viene dada por:

$$A = 2 \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x) dx = 2 \left(\frac{1}{2} x^4 - 4x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = 2(-8 + 16) = 16$$

14. Dibujar el recinto engendrado por las funciones

$$y = x - 1; \quad y = 2(x - 1); \quad y = (x - 1)^2$$

Calcular el área de dicho recinto.

Solución:

Se trata de dos rectas y de una parábola. Pueden representarse dando valores.

El área pedida es la del recinto sombreado en la figura.

Los puntos de corte entre las distintas gráficas se obtienen resolviendo los sistemas:

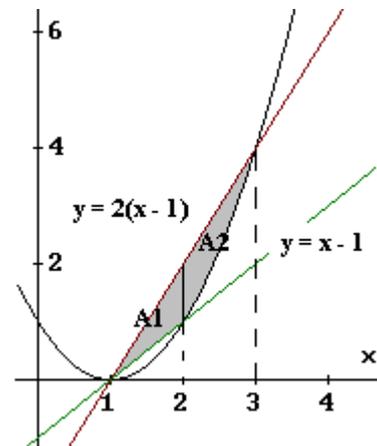
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = (x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, x = 2;$$

$$\begin{cases} y = 2(x - 1) \\ y = (x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, x = 3$$

El área del recinto viene dada por:

$$A = A1 + A2 = \int_1^2 [2(x - 1) - (x - 1)] dx + \int_2^3 [2(x - 1) - (x - 1)^2] dx =$$

$$= \int_1^2 (x - 1) dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$



15. a) Encuentra la primitiva de la función $f(x) = 27 - x^3 + 3e^{2x-1}$ que en el 1 valga 26,75.

b) Dibuja la función $f(x) = 27 - x^3$, y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 5$.

Solución

a) Es una integral casi inmediata:

$$F(x) = \int \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \int x dx + 4 \int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + c$$

$$\text{Si } F(1) = 26,75 \Rightarrow \frac{4}{2} - \frac{4}{2} + c = 5 \Rightarrow c = 5$$

$$\text{b) } f(x) = 27 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$$

Como $f'(x) < 0$ para todo x , la función es siempre decreciente.

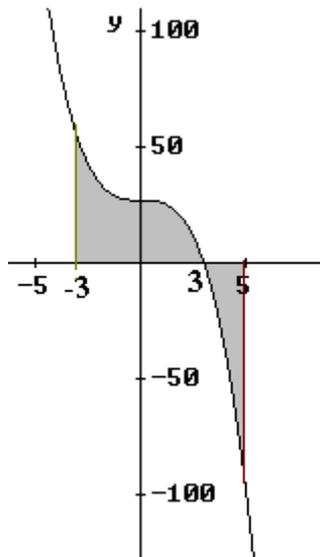
En $x = 0$ tiene un punto de inflexión, siendo convexa (\cup) si $x < 0$ y cóncava (\cap) cuando $x > 0$.

Cortes con los ejes:

$$\text{si } x = 0, f(0) = 27 \rightarrow \text{punto } (0, 27)$$

$$\text{si } y = 0, 0 = 27 - x^3, x = 3 \rightarrow \text{punto } (3, 0)$$

Dando otros valores: $(-2, 35)$; $(1, 26)$; $(2, 19)$; $(4, -37)$, se obtiene la figura siguiente.



El área pedida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^3 (27 - x^3) dx - \int_3^5 (27 - x^3) dx = \\ &= \left(27x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-3}^3 - \left(27x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_3^5 = \\ &= 162 + 82 = 244 \end{aligned}$$

16. Dada la función $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ ($x > 0$).

a) Encuentra la primitiva de f que en el 2 valga 5.

b) Dibuja la función f . Halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 4$.

Solución

a) Es una integral casi inmediata:

$$F(x) = \int \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \int x dx + 4 \int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + c$$

$$\text{Si } F(2) = 5 \Rightarrow \frac{4}{2} - \frac{4}{2} + c = 5 \Rightarrow c = 5$$

Por tanto, la primitiva buscada es: $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + 5$

b) La curva tiene una asíntota vertical (la recta $x = 0$) y otra oblicua (la recta $y = x$). Se ve fácilmente, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) \rightarrow x$$

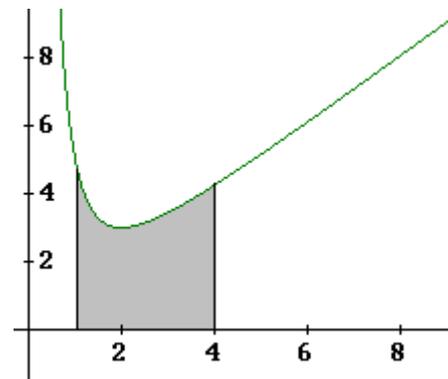
Damos algunos valores y representamos los puntos:

$$(1, 5); (2, 3); (3, 3,44); (4, 4,25); (5, 4,16)$$

Se obtiene la curva \rightarrow

El área pedida es:

$$A = \int_1^4 \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} \right]_1^4 = 7 - \frac{1}{2} - (-4) = \frac{21}{2}$$



17. a) Encuentra $f'(2)$ donde f' es la derivada de la función f dada por

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + 8x - x^2 - 12, \quad (x \neq 0).$$

b) Dibuja la función $f(x) = 8x - x^2 - 12$ y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución

a) $f(x) = \frac{4}{x^2} + 8x - x^2 - 12 \Rightarrow f'(x) = \frac{-8}{x^3} + 6x - 3x^2$

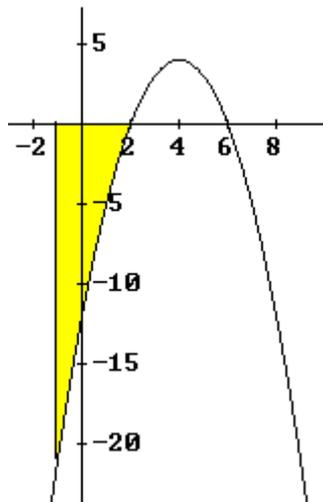
Luego $-10 = \frac{-8}{(-1)^3} + 6 \cdot (-1) - 3(-1)^2$

b) $f(x) = 8x - x^2 - 12$ puede trazarse dando valores; también puede verse que tiene un mínimo en $x = 4$, que es el vértice de la parábola, pues $f''(x) = 6 - 2x = 0$ si $x = 4$.

Algunos valores:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x) = 8x - x^2 - 12$	-21	-12	-5	0	3	4	-3	0

Su gráfica será la siguiente.



El área limitada por la curva y el eje OX entre -1 y 2 es la sombreada en la figura. Como en ese intervalo la función toma valores negativos, será:

$$A = - \int_{-1}^2 (-x^2 + 8x - 12) dx = - \left(-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right) \Bigg|_{-1}^2 =$$

$$= \frac{32}{3} + \frac{49}{3} = 27$$

18. Se espera que, en los próximos diez años, las ganancias (en millones de euros) de una empresa, vengan dadas por la función $P(t) = -2t^2 + 20t + 5$

- Determinar cuando las ganancias serán iguales a 5 millones de euros.
- Determinar en qué años decrecerán las ganancias. ¿Cuándo son máximas?
- ¿Cuáles serán las ganancias acumuladas durante los cinco primeros años?

Solución:

a) Se cumple: $P(t) = -2t^2 + 20t + 5 = 5 \Rightarrow t = 0, t = 10$.

La solución $t = 0$ carece de sentido. Por tanto, a los 10 años la empresa gana 5 millones.

b) Derivando: $P'(t) = -4t + 20$.— esta derivada se anula cuando $t = 5$.

Si $t < 5, P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es creciente.

Si $t > 5, P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ es decreciente

Si crece para valores de $t < 5$ y decrece para $t > 5$, en $t = 5$ se da el máximo de $P(t)$.

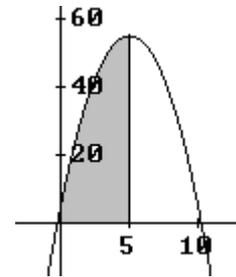
Dicho máximo es $P(5) = 55$ millones.

c) Las ganancias pedidas vienen dadas por la integral

$\int_0^5 (-2t^2 + 20t + 5)dt \rightarrow$ el área sombreada en la figura adjunta.

Su valor es:

$$\int_0^5 (-2t^2 + 20t + 5)dt = \left[\frac{-2}{3}t^3 + 10t^2 + 5t \right]_0^5 = \frac{575}{3} \text{ millones de euros.}$$



19. Se considera la parábola $p(x) = -0,5x^2 + 1,5x$ y sea $s(x)$ la línea poligonal que se obtiene uniendo los puntos $(0, 0), (1, 1), (2, 1)$ por segmentos de recta. Representa el recinto limitado por la parábola y la poligonal y calcula su área.

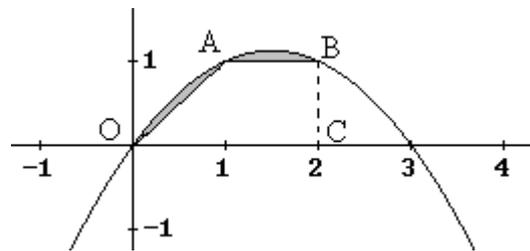
Solución:

Damos algunos valores para trazar la parábola:

x	0	1	2	3
$p(x) = -0,5x^2 + 1,5x$	0	1	1	0

El recinto es el sombreado en la siguiente figura.

Su área viene dada por la diferencia de la determinada por debajo del arco parabólico entre 0 y 2 y la del trapecio de vértices OABC. Y vale:



$$S = \int_0^2 (-0,5x^2 + 1,5x)dx - \frac{(2+1) \cdot 1}{2} = \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{1,5}{2}x^2 \right]_0^2 - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} + 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

20. Se considera la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$.

- Calcula el valor de a para que la recta tangente a la función en el punto $x = 3$ corte al eje OX en el punto $x = 5$.
- Calcula, además, el área de la región limitada por dicha tangente, el eje OX y la función $f(x)$, para el valor de a obtenido anteriormente.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente será:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

$$f(x) = -ax^2 + 5x - 4 \Rightarrow f'(x) = -2ax + 5$$

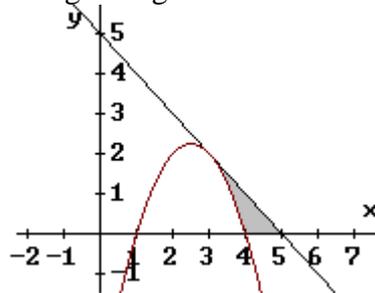
La tangente será:

$$y - (-9a + 11) = (-6a + 5)(x - 3)$$

Como pasa por el punto $(5, 0) \Rightarrow 0 - (9a + 11) = (-6a + 5)(5 - 3) \Rightarrow a = 1$.

En consecuencia, la función es $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, y su tangente en $x = 3$, $y = -x + 5$.

b) La región es la sombreada en la figura siguiente.



Su área viene dada por:

$$\begin{aligned} \int_3^5 (-x + 5) dx - \int_3^4 (-x^2 + 5x - 4) dx &= \left[-\frac{x^2}{2} + 5x \right]_3^5 - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_3^4 \\ &= -\frac{25}{2} + 25 - \left(-\frac{9}{2} + 15 \right) - \left[\left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(-9 + \frac{45}{2} - 12 \right) \right] = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

21. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ |x-2| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f .

2) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y eje de abscisas.

Solución:

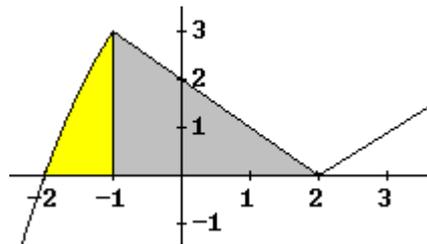
1) Es una función definida a trozos, compuesta por un trozo de parábola y dos trozos de recta, pues atendiendo al valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \leq -1 \\ -x + 2 & -1 < x < 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	0	3	2	1	0	1

Se obtiene la figura:



2) El área pedida es la sombreada en la siguiente figura.

Su valor es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2) dx + A(\text{triángulo}) = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{1}{3} - 4 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \frac{9}{2} = \frac{37}{6} \end{aligned}$$

22. a) Dada la función $f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que si f' es la derivada de f , entonces $f'(-1) = -10$.

b) Dibuja la función $f(x) = 3x^2 - x^3$. Encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución

$$a) f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x - 3x^2$$

$$\text{Si } f'(-1) = -10 \Rightarrow -10 = \frac{-a}{(-1)^2} + 6 \cdot (-1) - 3(-1)^2 \Rightarrow a = 1$$

$$b) f(x) = 3x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x) \Rightarrow f''(x) = 6 - 6x$$

La derivada primera se anula en $x = 0$ o $x = 2$. Luego:

- si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece
- si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece \Rightarrow en $x = 0$ hay un mínimo.
- si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece \Rightarrow en $x = 2$ hay un máximo.

La derivada segunda sea anula en $x = 1$, luego:

- si $x < 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (\cup)
- si $x > 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava (\cap) \Rightarrow en $x = 1$ hay punto de inflexión

La curva corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 3)$. Dando otros valores, $\{(-1, 4); (1, 2); (2, 4); (4, -16)\}$, puede trazarse la gráfica pedida.

El área pedida es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$A = \int_{-1}^2 (3x^2 - x^3) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = 8 - 4 - \left(-1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{21}{4}$$

