Estudio de funciones mediante límites y derivadas

Observación: La mayoría de estos ejercicios se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

1. El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es doble el de la distancia de A a B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad que B.

Solución:
Si a es la cantidad fija y b la proporcional, la función que da el precio del billete en función de los kilómetros, x, recorridos será:

$$p(x) = a + bx$$

Por una distancia d, la que hay entre A y B, se paga20 euros, luego: $20 = a + bd$
Por doble distancia, la que hay entre A y C, se paga 32 euros, luego: $32 = a + 2bd$

Restando ambas ecuaciones: $12 = bd \Rightarrow b = \dfrac{12}{d}$

Sustituyendo,$12 = bd$, en la primera ecuación: $20 = a + 12 \Rightarrow a = 8$.

Por tanto, $p(x) = 8 + \dfrac{12}{d}x$.

En consecuencia, para una distancia de $d/2$ habrá que pagar:

$$p(d/2) = 8 + \frac{12}{d}\frac{d}{2} = 8 + 6 = 14 \text{ euros}$$

---

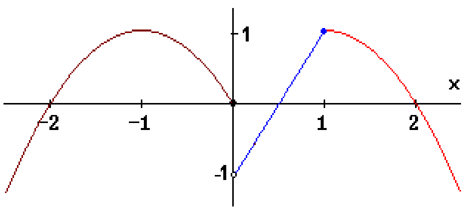
2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & si \quad x \le 0 \\ -1 + 2x & si \quad 0 < x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Representa gráficamente f.
b) Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:
a) Es una función definida a trozos, compuesta por dos trozos de parábola y un trozo de recta. Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	–3	–2	–1	0	0,1	0,5	1	1,1	2	3	4
$f(x)$	–3	0	1	0	–0.8	0	1	0,99	0	–3	–8

Se obtiene la figura:



b) A partir de la gráfica es evidente que la función es discontinua en x = 0 y es continua en x = 1.

Aplicando límites laterales se tiene:
En x = 0:

$$\text{si } x \to 0^-, \ f(x) = -x^2 + 4 \ \to 0$$
$$\text{si } x \to 0^+, \ f(x) = -x + 2 \ \to -1$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no es continua en x = 0.

En x = 1:

$$\text{si } x \to 1^-, \ f(x) = -1 + 2x \ \to 1$$
$$\text{si } x \to 1^+, \ f(x) = x - 2 \ \to 1$$

Como coinciden los límites laterales, la función es continua en x = 1.

---

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ |x-2| & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

a) Representa gráficamente *f*.
b) Estudia su continuidad.

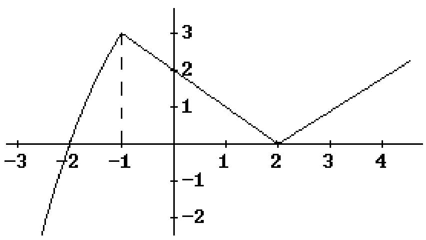
Solución:
a) Es una función definida a trozos, compuesta por un trozo de parábola y dos trozos de recta, pues atendiendo al valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \le -1 \\ -x + 2 & -1 < x < 2 \\ x - 2 & x \ge 2 \end{cases}$$

Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–5	0	3	2	1	0	1

Se obtiene la figura:



b) A partir de la gráfica es evidente que la función es continua en todos sus puntos.
Aplicando límites laterales tenemos:
En x = –1:

$$\text{si } x \to -1^-, \ f(x) = -x^2 + 4 \ \to 3$$
$$\text{si } x \to -1^+, \ f(x) = -x + 2 \ \to 3$$

Como coinciden los límites laterales, la función es continua en x = –1.
En x = 2:

$$\text{si } x \to 2^-, \ f(x) = -x + 2 \ \to 0$$
$$\text{si } x \to 2^+, \ f(x) = x - 2 \ \to 0$$

Como coinciden los límites laterales, la función es continua en x = 2.

4. a) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-4}$?

b) Calcula y simplifica la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Solución:

a) Dom(*f*) = (0, +∞) – {2}

La función ln *x* sólo está definida para *x* > 0.
El denominador (x^2 – 4) se anula en *x* = 2 (y en *x* = –2, pero ese valor ya está excluido).

b) $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

---

5. Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}.$$

a) Encontrar su dominio de definición
b) Estudiar su continuidad.
c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

Solución:

a) La función no está definida cuando se anula el denominador: cuando $x^2-3x+2=0$, cuyas soluciones son x = 1 y x = 2.
Por tanto, Dom(*f*) = **R** – {1, 2}.

b) Por lo dicho en el punto anterior la función es discontinua en x = 1 y en x = 2. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite de la función en ambos puntos.

En *x* = 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=-1.$$

Como el límite existe, la discontinuidad puede evitarse. Se evita definiendo *f*(1) = –1.

En *x* = 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{2}{0}=\infty.$$

En este caso, la discontinuidad no puede evitarse.

c) El resultado del límite anterior nos informa que la función tiene una asíntota vertical, la recta *x* = 2.

También tiene otra asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=1$. La ecuación de esta asíntota es *y* = 1.

6. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) Estúdiese si f(x) es continua en $x = 2$.
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.
c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

Solución:
a) El valor de la función en $x = 2$ es $f(2) = 4$.

Límites laterales:

Si $x\to 2^-$, $f(x) \to 4$.
Si $x\to 2^+$, $f(x) \to 2$.

Como no existe el límite, la función no es continua en $x = 2$.

b) En $x = 3$, $f\,'(x)=\dfrac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2} \to f(3)=\dfrac{21}{5}$; $f\,'(3)=\dfrac{59}{25}$

La tangente es: $y-\dfrac{21}{5}=\dfrac{59}{25}(x-3)$.

c) Asíntota oblicua: $y = mx + n$, siendo

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{x(x+2)}=3 \quad \text{y}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x+2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x}{x+2}=-8$$

La asíntota es: $y = 3x - 8$.

Por la izquierda, hacia $-\infty$, la función tiene una asíntota horizontal: la recta $y = 1$. No hay asíntotas oblicuas.

7. Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}$$

a) Determinar las asíntotas de la función.
b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Solución:
a) La función no está definida en $x = -3$. En ese punto tiene una asíntota vertical de ecuación $x = -3$, pues $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador supera en uno al grado del denominador. Su ecuación será $y = mx + n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x+9}{x+3}=-9$$

La asíntota es la recta de ecuación $y = x - 9$.

b) Derivando se tiene:

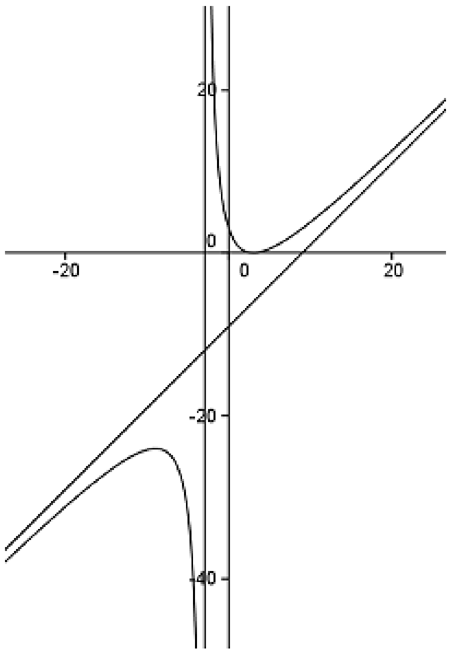
$$f'(x)=\frac{2(x-3)(x+3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}=\frac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2}$$

La derivada se anula en $x = -9$ y en $x = 3$, y como no está definida en $x = -3$ hay que estudiar el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty, -9)$, $(-9, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Si $x \in (-\infty, -9)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
Si $x \in (-9, -3)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece. Por tanto, en $x = -9$ se da un máximo.

Si $x \in (-3, 3)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.
Si $x \in (3, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece. Por tanto, en $x = 3$ hay un mínimo.

Aunque no se pide, damos su gráfica.



8. Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Hallar las asíntotas de la curva.

Solución:

a) La ecuación de la tangente será $y - f(1) = f´(1)(x-1)$, donde $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$$f(1) = \frac{1}{2};\ f´(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} \to f´(1) = 1$$

Por tanto, la tangente es:

$$y - \frac{1}{2} = x - 1 \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

b) La curva no tiene asíntotas verticales, pues su denominador no se anula en ningún caso.
Tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1 \text{ y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$$

La asíntota es la recta $y = x$.

---

9. Sea considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0.$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.
b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10 \Rightarrow f´(x) = \dfrac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Rightarrow f´´(x) = \dfrac{6x}{a} - 2a$

Si tiene un máximo en $x = 1$, entonces $f´(1) = 0$ y $f´´(1) < 0$.
Por tanto,

$$\frac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 5a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ o } a = 3.$$

Para $a = -\dfrac{1}{2}$, $f´´(x) = -12x + 1$ y $f´´(1) = -11$

Para $a = 3$, $f´´(x) = 2x - 6$ y $f´´(1) = -4$

Por tanto hay máximos si $a = -\dfrac{1}{2}$ o $a = 3$.

Obsérvese que las funciones serían, respectivamente, $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ y
$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$

b) Para a = 3 la función es y sus derivadas son:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f''(x) = 2x - 6$$

La derivada primera se anula en: x = 1 y x = 5.
Como $f''(1) = -4$, en x = 1 hay un máximo; punto (1, 35/3)
Como $f''(5)$ = 4, en x = 5 hay un mínimo; punto (5, 5/3).

---

10. Para cada valor de a se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x+2}$

Se pide:
a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en x = 2.
b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para el valor a = 3.

Solución:
a) Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en x = 2 debe cumplirse que: $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$
Derivando: $f'(x) = \frac{(6x-a)(x+2) - (3x^2 - ax)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$

Como $f'(2) = \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$
Veamos que, para ese valor de a = 18, $f''(2) > 0$:

$$f''(x) = \frac{96}{(x+2)^3} \rightarrow f''(2) = \frac{96}{64} > 0$$

b) Para a = 3 (y para cualquier valor de a) es evidente que la función tiene, en x = –2, una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 3x}{x+2} = \infty$$

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. La calculamos:
La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 3x}{x(x+2)} = 3 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x \to \infty}(f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{3x^2 - 3x}{x+2} - 3x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-9x}{x+2} = -9$$

La asíntota es: $y = 3x - 9$.

11. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$ calcúlense las rectas tangentes a la misma, que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución:
Las tangentes pedidas deben tener pendiente –1. Luego:

$$y' = -3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x = -3 \text{ o } x = 3.$$

Para $x = –3$, se tiene que $y = –51$. El punto de tangencia es (–3, –51); y la recta tangente:

$$y + 51 = -1(x + 3) \Leftrightarrow y = -x - 54.$$

Para $x = 3$, $y = 51$. El punto de tangencia es (3, 51); y la recta tangente:

$$y - 51 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 54.$$

---

12. Sea la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$.

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

a) No tiene asíntotas de ningún tipo. Es obvio para horizontales y verticales. Veamos el caso de oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} 2x}{x} = 2,$$

pero

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} (2x + \operatorname{sen} 2x - 2x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} 2x \text{, que no existe.}$$

b) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f'(x) = 2 + 2\cos 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x$

$$f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

En los demás puntos la derivada es positiva. Por tanto, f es monótona creciente.

La derivada segunda se anula en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Por tanto, para esos valores hay inflexión.

(También puede verse que $f'''(x) = -8\cos 2x \neq 0$ (vale 8) si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$)

13. a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$.
b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje *OX* y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje *OX*.

Solución:
a) $y = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow y' = 2x - 4 \Rightarrow y'' = 2$
El mínimo se da cuando $y' = 0 \rightarrow x = 2$.
Como $y''(2) = 2 > 0$, efectivamente, en $x = 2$ se da el mínimo.

b) Puntos de corte d la curva con el eje OX: $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 5$.
Puntos de corte: (–1, 0), (5, 0)

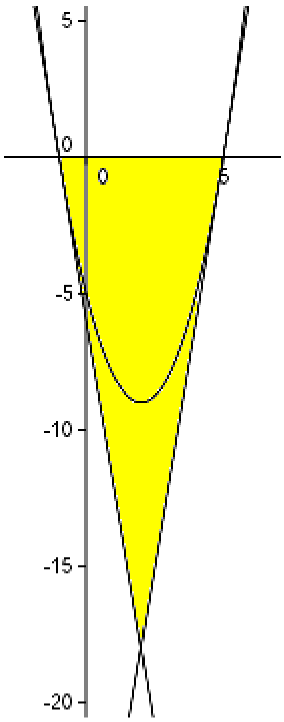
Tangentes: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- En (–1, 0): $y(-1) = 0$; $y'(-1) = -6 \Rightarrow y = -6(x + 1)$
- En (5, 0): $y(5) = 0$; $y'(5) = 6 \Rightarrow y = 6(x - 5)$

Las tangentes se cortan en el punto (2, –18), solución del sistema $\begin{cases} y = -6(x+1) \\ y = 6(x-5) \end{cases}$

Resulta un triángulo de base 6 (distancia entre (–1, 0) y (5, 0)) y altura 18 (distancia del eje *OX* al punto (2, –18).

Su área es: A = (6 · 18)/2 = 54.

A continuación se da la representación gráfica del ejercicio.



14. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$.

a) Calcular los valores del parámetro *a* para los que *f*(x) es continua en $x = 2$.
b) ¿Para qué valor del parámetro *a* *f*(x) tiene un máximo o mínimo en $x = -1$? Determinar si es máximo o mínimo.
c) Para $a = 4$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*(x).

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 2$ deben ser iguales los límites laterales en ese punto.

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to 4 + 2a$
Si $x \to 2^+$, $f(x) \to 1$ $\Rightarrow$ $1 = 4 + 2a \Rightarrow a = -3/2$

b) En un entorno de x = –1, $f(x)=x^2+ax$.

La función tendrá un extremo en x = –1 si $f\,'(-1) = 0$

$$f\,'(x)=2x+a \Rightarrow f\,'(-1)=-2+a=0 \Rightarrow a=2$$

Como $f\,''(x) = 2 > 0$, en x = –1 se da un mínimo.

c) Para $a = 4$, $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si } x<2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Salvo en $x = 2$, en donde la función no es derivable por no ser continua, la derivada es:

$$f\,'(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } x<2 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x<2 \end{cases}$$

La derivada se anula en $x = -2$, luego:

- Si $x < -2$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.
- Si $-2 < x < 2$, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.
- Si $x > 2$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

---

15. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.
b) Calcule sus asíntotas.
c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 2.

Solución:

a) Ambas funciones son continuas en todo su dominio. Por tanto, la única dificultad se presenta en el punto $x = 1$.

Para que sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites laterales (en $x = 1$) con el valor de $f(1) = 2$.

Si $x \to 1^-$, $f(x)=2^x \to 2$

Si $x \to 1^+$, $f(x)=\dfrac{2}{x} \to 2$

Por tanto, la función es continua siempre.

El valor de la derivada, salvo en $x = 1$, que es donde presenta dificultades es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x \to 1^-$, $f'(x) = 2^x \ln 2 \to 2\ln 2$

Si $x \to 1^+$, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} \to -1/2$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

b) La recta y = 0 (el eje OX) es asíntota horizontal de la curva tanto hacia $-\infty$ como hacia $+\infty$, pues:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

c) La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$

Se tiene: $f(2) = 1$; $f'(2) = -1/2$.

Por tanto, la tangente es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

---

16. a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Halle la función derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

Solución:

a) Como la función está definida mediante dos parábolas, el único punto que presenta dificultades es $x = 2$, en donde pueden unirse o no (continuidad), y ser derivable o no.

- Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con su valor de definición en dicho punto $x = 2$.

Si $x \to 2^-$, $f(x) = -(x-1)^2 + b \to -1 + b$

Si $x \to 2^+$, $f(x) = a(x-3)^2 + 3 \to a + 3$

Por tanto, la función será continua en x = 2 cuando $-1 + b = a + 3$.

- Para que sea derivable deben coincidir las derivadas laterales en $x = 2$.

Salvo en $x = 2$, $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 2a(x-3) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Veamos qué pasa en $x = 2$.

Si $x \to 2^-$, $f'(x) = -2(x-1) \to -2$

Si $x \to 2^+$, $f'(x) = 2a(x-3) \to -2a \Rightarrow -2 = -2a$

Por tanto, la función es derivable cuando $\begin{cases} -2a = -2 \\ -1+b = a+3 \end{cases} \Rightarrow$ $a = 1$; $b = 5$

La función continua y derivable es: $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 5 & \text{si } x \le 2 \\ (x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{2e^{2x+1}(x-1)^2 - e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow$ (simplificando)

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1) - e^{2x+1}2}{(x-1)^3} = \frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3}$$

---

17. a) Calcula los puntos de la gráfica de la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente $-1/3$.

b) Determina la recta tangente en ese punto.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente a una curva coincide con la derivada en la abscisa del punto de tangencia. Por tanto:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

El punto de tangencia será (2/3, *f*(2/3)) → (2/3, 29/27)

$$f((2/3) = y(2/3) = (2/3)^3 - 2(2/3)^2 + 2/3 + 1 = 29/27$$

b) La ecuación de la recta tangente a *f*(x) en el punto (*a*, *f*(*a*)) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso:

$$y - \frac{29}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{35}{27}$$

---

18. La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes.

a) Determina el punto de tangencia.

b) Determina *b*.

Solución:

a) En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y' = 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Para $x = \dfrac{2}{3}$, $y = 3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{3}$. El punto de tangencia es $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

b) Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y = 4x + b$:

$$\frac{1}{3} = 4\cdot\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

19. Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{9}{x}$, calcular a y b de manera que la gráfica de f pase por el punto (2, 4) y tenga tangente horizontal en ese punto.

Solución:

$$f(x) = ax + b + \frac{9}{x} \Rightarrow f'(x) = a - \frac{9}{x^2}$$

Debe pasar por (2, 4) $\Leftrightarrow$ $f(2) = 2a + b + \frac{9}{2} = 4$

Que la tangente en ese punto sea horizontal significa que $f'(2) = 0$, luego:

$$f'(2) = a - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $2 \cdot \frac{9}{4} + b + \frac{9}{2} = 4 \Rightarrow b = -5$.

---

20. Considera la función $f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.
b) ¿En qué punto de la curva es mínima la pendiente de la recta tangente? ¿Cuál es el valor de la pendiente mínima?

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto (a, $f(a)$) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{10} - 30x \Rightarrow f(0) = 2500;\ f'(0) = 0$$

La tangente es y – 2500 = 0, que es una recta paralela al eje OX.

b) La pendiente de las rectas tangentes a f(x) en un punto genérico x viene dada por el valor de $f'(x)$. En nuestro caso por $f'(x) = g(x) = \frac{x^2}{10} - 30x$. (La hemos denotado por $g(x)$ para evitar confusiones en lo que sigue.)

El mínimo de $g(x)$ se obtiene en las soluciones de la ecuación $g'(x) = 0$ que hacen positiva a la función $g''(x)$.

$$g'(x) = \frac{x}{5} - 30 = 0 \Rightarrow x = 150$$

Como $g''(x) = \frac{1}{5} > 0$, en ese valor de $x = 150$ se encuentra el mínimo buscado.

El valor de la pendiente mínima es $g(150) = \frac{150^2}{10} - 30 \cdot 150 = -2250$

NOTA: El mínimo (o el máximo) de la pendiente de la recta tangente a la curva determinada por la función $f(x)$ se da en el punto de inflexión de la función: en alguna de las soluciones de $f''(x) = 0$.

21. Se considera la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$.

a) Razonar a qué es igual el dominio de definición de $f(x)$.
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ y los puntos de inflexión.
d) Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = -3$ sea $y = ax + b$.

Solución:

a) Dom f = **R** – {–5}. Para x = –5 el denominar de la expresión racional se hace 0.

b) Derivamos:

$$f'(x) = \frac{2(x+5) - 2x}{(x+5)^2} = \frac{10}{(x+5)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ para todo x del dominio, la función es creciente en **R** – {–5}. Est es, f es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$

c) Se hace la derivada segunda: $f''(x) = \dfrac{-20}{(x+5)^3}$

Si $x < -5$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$)
Si $x > -5$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$)
No hay puntos de inflexión, pues $f''(x) \neq 0$ para todo x.

d) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto (–3, f(–3)) es:

$$y - f(-3) = f'(-3)(x - (-3))$$

Como $f(-3) = \dfrac{-6}{2} = -3$ y $f'(-3) = \dfrac{10}{2^2} = \dfrac{5}{2}$, se tendrá:

Ecuación de la tangente: $y + 3 = \dfrac{5}{2}(x+3) \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{9}{2}$

Por tanto: $a = \dfrac{5}{2}$ y $b = \dfrac{9}{2}$

---

22. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+a} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que $f(x)$ sea continua en $x = 0$?
b) Para $a = 1/2$ calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$.
c) Para $a = 2$ compruebe si $x = 1/2$ es asíntota vertical de $f(x)$.

Solución:

a) Para que sea continua en $x = 0$ deben coincidir los límites laterales en ese punto.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 2) = -2$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-1}{x+a} = -\dfrac{1}{a}$

Por tanto $-2 = -\dfrac{1}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

b) Para $a = 1/2$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4x-2}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, siendo sus derivadas, salvo en x = 0,

$$f´(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{8}{(2x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f´´(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-32}{(2x+1)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Para $x < 0$, $f´(x) < 0$ y $f´´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente y convexa ($\cup$).
- Para $x > 0$, $f´(x) > 0$ y $f´´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente y cóncava ($\cap$).

c) Para $a = 2$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Esta función no tiene asíntotas verticales; en particular, en x = 1/2, $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x-1}{x+2} = 0$.

(En cambio, la recta y = 2 es asíntota horizontal hacia $+\infty$.)

---

23. Se considera la función $f(x) = a\ln x + x^3$, siendo a un parámetro real.

a) Escriba el dominio de definición de $f(x)$.

b) Compruebe si hay algún valor de a para el que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x = 1.

c) Para $a = -3$ calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)$.

d) Para a = 1 calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Solución:

a) El dominio de f es el mismo que el de ln x. Por tanto, Dom(f) = $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R},\ x > 0\}$.

b) $f(x) = a\ln x + x^3$ tiene un punto de inflexión en x = 1 si $f´´(1) = 0$.

$$f(x) = a\ln x + x^3 \Rightarrow f´(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 \Rightarrow f´´(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x$$

$$f´´(1) = -\frac{a}{1} + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

La función tiene un PI en x = 1 si a = 6. Para asegurarlo hay que comprobar que $f´´´(1) \neq 0$.

En efecto, $f´´´(x) = \dfrac{12}{x^3} + x \to f´´´(1) = 13$

c) Para $a = -3$, $f(x) = -3\ln x + x^3 \Rightarrow f´(x) = -\dfrac{3}{x} + 3x^2$

La derivada se anula cuando x = 1. Por tanto:

- Si $0 < x < 1$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece
- Si $x > 1$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece $\Rightarrow$ en x = 1 hay un mínimo.

d) Para $a = 1$, $f(x) = \ln x + x^3$, siendo:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + x^3) = [+\infty + \infty] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x + x^3) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x + \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = [-\infty + 0] = -\infty$

---

24. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$.

Determinar:

a) Dominio de definición.
b) Asíntotas si existen.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus máximos y mínimos. Si es que existen.

Solución:

a) Dominio: **R** – {3}.

b) Como $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \infty$, la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al de denominador más 1. Esta asíntota es $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x} = 1 \quad \text{y}$$

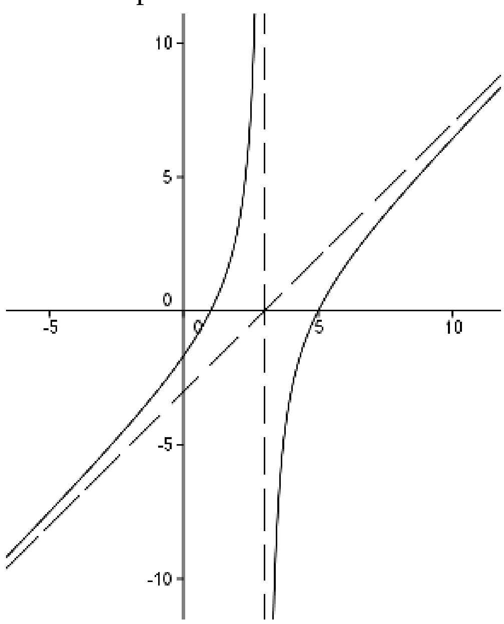
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x + 5}{x - 3} = -3$$

Por tanto, la asíntota es $y = x - 3$.

c) Derivando se tiene: $f'(x) = \dfrac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$

Esta derivada no se anula en ningún punto, pues $x^2 - 6x + 13 > 0$ para todo x.
En consecuencia, la función es creciente en todo su dominio; luego no tiene máximos ni mínimos.

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.



25. Cada mes, una empresa decide el gasto en publicidad en base a los beneficios que espera obtener dicho mes. Para ello usa la siguiente función, donde *G* es el gasto en publicidad (en cientos de euros) y *x* los beneficios esperados (en miles de euros):

$$G(x)=\begin{cases} 6+2x-\dfrac{x^2}{6} & 0\le x\le 9 \\ 3+\dfrac{75x+5400}{10x^2} & x>9 \end{cases}$$

a) ¿Es el gasto en publicidad una función continua del beneficio?
b) Indica cuándo crece y cuándo decrece el gasto.
c) Por muchos beneficios que espere, ¿el gasto llegará a ser inferior a 4 (cientos de euros)?

Solución
a) Cada una de las funciones que definen $G(x)$ es continua en su dominio. La única duda se plantea en el punto de unión de los intervalos, en $x = 9$. Será continua en ese punto si los límites laterales son iguales. Veamos:

$$\text{si } x\to 9^-,\ \ G(x)=6+2x-\frac{x^2}{6}\ \to\ 10{,}5$$

$$\text{si } x\to 9^+,\ \ G(x)=3+\frac{75x+5400}{10x^2}\ \to\ 10{,}5\ \ \Rightarrow\ G(x) \text{ es continua siempre (para } x>0).$$

b) Estudiamos su derivada.

$$G'(x)=\begin{cases} 2-\dfrac{x}{3} & 0<x<9 \\ \dfrac{-15x-2160}{2x^3} & x>9 \end{cases}$$

Para ver el crecimiento estudiamos el signo de la derivada.
$G'(x) = 0$ si $x = 6$.

- Si $0 < x < 6$, $G'(x) > 0 \Rightarrow G(x)$ crece.
- Si $6 < x < 9$, $G'(x) < 0 \Rightarrow G(x)$ decrece $\Rightarrow$ en $x = 6$ hay un máximo.
- Si $x > 9$, $G'(x) < 0 \Rightarrow G(x)$ decrece.

c) Cuando $x \to \infty$, el gasto se acerca a 3 (cientos de euros), pues:

$$\lim_{t\to\infty} P(t)=\lim_{t\to\infty}\left(3+\frac{75x+5400}{10x^2}\right)=3^+$$

Por tanto, el gasto siempre será inferior a 400 euros.