Determinantes y matrices

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla la inversa de A − B, y la matriz X tal que X(A − B) = A + B.

Solución:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ |A - B| = 1; \text{ Adjunta de } (A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De

$$X(A - B) = A + B \Rightarrow X = (A + B) \cdot (A - B)^{-1} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

---

2. Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de *A*.

El determinante de *A* vale $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1(3-4) - 3(-6-6) + 1(4+3) = 42$

La matriz de los adjuntos es, $A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 7 \\ 11 & -6 & 7 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \dfrac{1}{42} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 12 & -6 & 0 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

3. Encuentra el valor de *a* que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:
Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 45 - 4a - 5 = 40 - 4a$$

Como $|M| = 0$ cuando $a = 10$, para ese valor de a la matriz M no tiene inversa. En cambio, si $a \neq 10$ sí tendrá inversa.

---

4. Resuelve la ecuación matricial AX = BX + C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\mathrm{AX} = \mathrm{BX} + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{AX} - \mathrm{BX} = \mathrm{C} \Rightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{B})\mathrm{X} = \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{X} = (\mathrm{A} - \mathrm{B})^{-1}\mathrm{C}$$

Cálculos:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = -1; \quad adj(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, comprueba que $A^{-1}\cdot B = A$.

b) Calcula el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m.

Solución:

Cálculo de la inversa de A.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

El determinante de A vale: $|A| = -a^2$.

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} -a & 2 & a \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

Luego $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \dfrac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -2/a^2 & 1/a & 0 \\ -1/a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Multiplicando:

$$A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -2/a^2 & 1/a & 0 \\ -1/a & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

b) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Para ver si puede ser 3 hacemos su determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{vmatrix} = -(6m+90)+(3m+45) = -3m-45$$

Ese determinante vale 0 cuando $m = -15$.

Por tanto: Si $m = -15$ el rango 2; en caso contrario, el rango vale 3.

6. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.
c) Determina *x* para que $A \cdot B = I_2$

Solución:

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{x = 1.}$$

b) Hallamos $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ij})^t$, siendo ($B_{ij}$) la matriz de los adjuntos.

Como $|B| = -1$ y $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{x} - 1 = -1 \Rightarrow \text{x} = 0$$

c) De $A \cdot B = I_2 \Rightarrow A = B^{-1}$.
Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1.$$

7. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.
b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.
c) Calcúlese A^{86}.

Solución:

(a) $|A|=\begin{vmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1 \Rightarrow$ la matriz A es invertible.

$|B|=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ la matriz B no es invertible.

Inversa de A:

$$\text{Matriz adjunta } (A_{ij})=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{(A_{ij})^t}{|A|}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

(b) $XA - B = 2I \Rightarrow XA = 2I + B \Rightarrow X = (2I + B)A^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & -20 & 3\\ 17 & -13 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(c) $$A^2=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A^4 = A$ (A es periódica de periodo 3)

$A^{86} = A^{3 \cdot 28} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$.

8. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ -2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}-x\\ 2\\ z\end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz inversa de *A*.
b) Halla los valores de *x*, *y*, *z* para los que se cumple $AX=Y$.

Solución:

a) La matriz inversa viene dada por $A^{-1}=\dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de *A*.

El determinante de *A* vale, $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=1$

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

b) $AX=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ 2\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-2y-2=-x\\ y=2\\ -x+3y=z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=y+1\\ y=2\\ -x+3y=z\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=3,\ y=2,\ z=3.$

9. a) Despeja la matriz *X* en la ecuación: $2X - A\cdot X = C - B\cdot X$
b) Halla la matriz *X* sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:
a) $2X - A\cdot X = C - B\cdot X \Rightarrow 2X - A\cdot X + B\cdot X = C \Rightarrow (2I - A + B)\cdot X = C \Rightarrow$
$\Rightarrow X = (2I - A + B)^{-1}\cdot C$, suponiendo que exista la matriz inversa

b) Para las matrices dadas:

$$2I - A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|2I - A + B| = 2$, dicha matriz tiene inversa. Vamos a calcularla.

La matriz de los adjuntos es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $(2I - A + B)^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = (2I - A + B)^{-1}\cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$.

b) Calcula la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X \cdot B = B + A$.

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 0 & -1+3\\ 4+3 & -2 & -2\\ -2-1 & 0 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 7 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) $X \cdot B = B + A \Rightarrow X=(B+A)\cdot B^{-1}$

Cálculo de la inversa de B.

La matriz inversa viene dada por $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot(B_{ij})^t$, siendo (B_{ij}) la matriz de los adjuntos.

El determinante de B vale: $|B|=-6$.

La matriz de los adjuntos es: $B_{ij}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -3 & 3 & -3\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/3 & 0 & 2/3\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/3 & 0 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 7/3\\ 7/6 & 1/2 & 7/6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

11. Tres familias van a una heladería. La primera familia toma 2 helados pequeños y 1 grande; la segunda familia toma 2 pequeños, 1 mediano y 1 grande; y la tercera familia toma 1 pequeño y 2 grandes. A la primera familia le cobran 4,50 €, a la segunda, 6,30 €, y a la tercera, 5,40 €. Se denotan por *x*, *y*, *z* las incógnitas que representan respectivamente el precio de un helado pequeño, de uno mediano, y de uno grande.

a) Dé la matriz *A* que expresa el número de helados pequeños, medianos, y grandes que toma cada una de las tres familias, de manera que

$$A \cdot X = B$$

donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6{,}3 \\ 5{,}4 \end{pmatrix}$. (0,5 puntos)

b) Calcule A^{-1}. (1,5 puntos)

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$. (0,5 puntos)

Solución:

a) La matriz *A* es: $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} p & m & g \end{array} \\ \begin{array}{c} Fam1 \\ Fam2 \\ Fam3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$.

Por tanto, $A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6{,}3 \\ 5{,}4 \end{pmatrix}$

b) La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos.

Determinante de *A*: $|A| = 3$. Matriz de los adjuntos: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Luego,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}50 \\ 6{,}30 \\ 5{,}40 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3{,}60 \\ 5{,}40 \\ 6{,}30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}80 \\ 2{,}10 \end{pmatrix}$

12. a) Despeja la matriz X en la ecuación: $2\cdot X - B = A\cdot X$
b) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $2\cdot X - B = A\cdot X \Rightarrow 2X - A\cdot X = B \Rightarrow (2I - A)\cdot X = B \Rightarrow X = (2I - A)^{-1}\cdot B$, suponiendo que exista la matriz inversa.

b) Para las matrices dadas:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|2I - A| = -4$, dicha matriz tiene inversa. Vamos a calcularla.

La matriz de los adjuntos es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $(2I - A)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = (2I - A)^{-1}\cdot B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considera la ecuación matricial $X + X\cdot A + B^t = 2C$, donde las matrices A, B y C vienen dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial, ¿qué orden tiene?

b) Calcula la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz $I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) Resuelve la ecuación matricial obteniendo el valor de la matriz X.

Solución:

a) $X + X\cdot A + B^t = 2C \Rightarrow X\cdot(I + A) + B^t = 2C \Rightarrow X(I + A) = 2C - B^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \left(2C - B^t\right)\cdot(I + A)^{-1}$$

La matriz $2C - B^t$ es de dimensión 2×3; la matriz $I + A$ es de dimensión 3×3. Por tanto, X será de dimensión 2×3.

b) $2C - B^t = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$I + A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. El determinante de esta matriz vale -1: $|I + A| = -1$.

Su inversa es $(I + A)^{-1} = \dfrac{1}{|I + A|}\left(Adj(I + A)\right)^t$, siendo $\left(Adj(I + A)\right)^t$ la traspuesta de la matriz de los adjuntos de $I + A$.

Como $Adj(I + A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$(I + A)^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X = M + M^T$, siendo X una matriz desconocida de tamaño 2×2, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y M^T la traspuesta de M.

Solución:
Despejando se tiene:

$$M \cdot X = M + M^T \Rightarrow M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot M + M^{-1} M^T \Rightarrow X = I + M^{-1} M^T$$

Matriz traspuesta: $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de M^{-1} por el método de Gauss:

$$(M|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \\ F2-3F1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ F2/(-2) \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \begin{matrix} F1-2F2 \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$X = I + M^{-1} M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

15. Determina una matriz X tal que A + 2XB = C, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$ Se pide:

Solución:

A + 2XB = C $\Rightarrow$ 2XB = C − A $\Rightarrow$ $X=\frac{1}{2}(C-A)B^{-1}$

$$C-A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 8 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

Inversa de B:

$|B|=4$. Matriz de los adjuntos: $(B_{ij})=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1}=\frac{(B_{ij})^t}{|B|}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 8 & -4 & -2\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8 & 8 & 8\\ 0 & 8 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$