

TEMA 2 – MATRICES

OPERACIONES CON MATRICES

EJERCICIO 1 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula A^4 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Comprobamos que $A^2 = 2A - I$:

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Son iguales.

Utilizando que $A^2 = 2A - I$, calculamos A^4 :

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I$$

$$\text{Por tanto: } A^4 = 4A - 3I = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 : Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ Satisface la igualdad $A^2 + xA + yI = 0$, halla los valores numéricos de x e y (I representa la matriz identidad de orden 2).

Solución:

$$\text{Calculamos } A^2: A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } A^2 + xA + yI = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + x + y & 10 + 2x \\ -15 - 3x & 10 + 4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, ha de ser: } \begin{cases} -5 + x + y = 0 & \rightarrow y = 5 - x = 5 - (-5) = 10 \\ 10 + 2x = 0 & \rightarrow x = -5 \\ -15 - 3x = 0 & \rightarrow x = -5 \\ 10 + 4x + y = 0 & \rightarrow y = -10 - 4x = -10 + 20 = 10 \end{cases}$$

Por tanto: $x = -5$; $y = 10$

EJERCICIO 3 : Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener “ x ” para que $A^2 - xA + yI = 0$

Solución:

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, tenemos que ha de ser: } \left. \begin{array}{l} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = -2-2x = -2-6 = -8 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow y = -5-x = -5-3 = -8 \end{array} \quad \text{Por tanto: } x = 3, y = -8$$

EJERCICIO 4 : Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^t A Y = Y$

Solución:

a) La matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^t X = X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y = y \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbf{R}$.

$$c) A^t A Y = Y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+c = a \rightarrow c = 0 \\ b = b \\ a+c = c \rightarrow a = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto: } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } b \in \mathbf{R}.$$

PROBLEMAS CON MATRICES

EJERCICIO 5 : Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A . La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz B .

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

	PAN	AGUA	LECHE		1997	1998	1999	2000	
F_1	450	800	650	$A =$	PAN	85	90	90	95
F_2	500	810	620		AGUA	28	30	30	35
F_3	200	500	600		LECHE	70	72	75	80

Solución:

a) La matriz A es 3×3 y la B es 3×4 . Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B \cdot A$ no se puede hacer, pero el $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{matrix} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix}$$

La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

EJERCICIO 6 : En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos A , B , y C , que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO \ MATERIAL	A	B	C
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de A , 4 de B y 3 de C .

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

EJERCICIO 7 : En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidad
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{SILLAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SOFÁS} \end{matrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{matrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 1\,500 \end{pmatrix}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 de aluminio.

EJERCICIO 8 : Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5 y 2 cm con los precios respectivos siguientes:

Clavos A :	0,20	0,30	0,40	céntimos de euro
Clavos Q :	0,30	0,45	0,60	céntimos de euro
Clavos H :	0,40	0,60	0,80	céntimos de euro

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud:	100A	50Q	700H
De 1,5 cm de longitud:	200A	20Q	600H
De 2 cm de longitud:	500A	30Q	400H

Se pide:

- a) Resume la información anterior en dos matrices: M y N . M que recoja la producción por minuto, y N que recoja los precios.
 b) Calcula el elemento a_{11} de la matriz $M \cdot N$ y da su significado.
 c) Calcula el elemento a_{11} de la matriz $N \cdot M$ y da su significado.

Solución:

$$\begin{array}{c} \text{a) Unidades producidas por minuto:} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{Q} \\ \text{H} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 100 & 200 & 500 \\ 20 & 20 & 30 \\ 700 & 600 & 400 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Precios (en céntimos de euro):} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{Q} \\ \text{H} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 0,20 & 0,30 & 0,40 \\ 0,30 & 0,45 & 0,60 \\ 0,40 & 0,60 & 0,80 \end{pmatrix} = N \end{array}$$

b) $a_{11} = 100 \cdot 0,20 + 200 \cdot 0,30 + 500 \cdot 0,40 = 280$ céntimos.

Producen 280 céntimos de euro de clavos de aluminio por minuto.

c) $a_{11} = 0,20 \cdot 100 + 0,30 \cdot 50 + 0,40 \cdot 700 = 315$ céntimos.

Producen 315 céntimos de euro de clavos de 1cm por minuto.

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ Buscar alguna sin inversa

EJERCICIO 9 : Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

• La inversa de A: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$
 $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a + 3 \cdot 3^a \\ 2 \cdot 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$
 $\xrightarrow{\begin{array}{l} 10 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 13 & -9 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 1^a \\ -\frac{1}{10} \cdot 2^a \\ -\frac{1}{2} \cdot 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{15}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{5}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 13 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

• La inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

No tiene inversa porque la tercera fila es nula.

• La inversa de C: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 2^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} 4 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{matrix} 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{8} \cdot 1^a \\ \frac{1}{4} \cdot 2^a \\ \frac{1}{2} \cdot 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \text{ Así, } C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

CALCULAR LA POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 10 : Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a, b y c son tres números reales arbitrarios.

- a) Encuentra A^n para todo natural n . b) Calcula $(A^{35} - A)^2$.

Solución:

a) $A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A^3 = 0$, tenemos que $A^n = 0$ para $n \geq 3$.

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a): $(A^{35} - A)^2 = (0 - A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

EJERCICIO 11 : Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ b) Halla una matriz, X , tal que $AX = B$.

Solución:

a) Se trata de probar que $AA^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

b) Despejamos X en la igualdad $AX = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Por el apartado a), conocemos A^{-1} ; luego: $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \\ -9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 12 : Halla la matriz X que verifica $BX = A$, siendo $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Solución: Despejamos X multiplicando por la izquierda por B^{-1} : $B^{-1}BX = B^{-1}A \rightarrow X = B^{-1}A$

$$\begin{aligned} \text{Hallamos } B^{-1}: & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3 \cdot 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow & \begin{matrix} 5 \cdot 1^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & | & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{15} \cdot 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ \frac{1}{5} \cdot 3^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{6}{15} & \frac{-3}{15} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Como } B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}, X = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Así: } X = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 12 \\ 60 \\ -21 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 13 : Resuelve la ecuación matricial $XA = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución: Despejamos X multiplicando por A^{-1} por la derecha: $XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$

$$\text{Hallamos } A^{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 14 : Halla la matriz X que verifica $AX + B = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula.

Solución: Despejamos X : $AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \rightarrow IX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$

$$\text{Calculamos la inversa de } A: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Intercambiamos las filas } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ -2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} + 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = - \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 26 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 35 \\ -26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

RESOLVER SISTEMAS MATRICIALES

EJERCICIO 15 : Resuelve el siguiente sistema matricial: $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; $2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ Así, el sistema queda: $\left. \begin{matrix} 3X - 2X = A \\ 2X + X = B \end{matrix} \right\} X = B - 2X$

$$3X - 2(B - 2X) = A \rightarrow 3X - 2B + 4X = A \rightarrow 7X = A + 2B \rightarrow X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

$$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7} \left[3 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 16 : Halla la matriz $X^2 + Y^2$, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos,

verificando: $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Tenemos que resolver el sistema:

$$\left. \begin{matrix} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (-3) \cdot 1^a \rightarrow -15X - 9Y = -3A \\ 5 \cdot 2^a \rightarrow 15X + 10Y = 5B \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \cdot 1^a \rightarrow 10X + 6Y = 2A \\ -3 \cdot 2^a \rightarrow -9X - 6Y = -3B \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Sumando} & Y = 5B - 3A & \text{Sumando} & X = 2A - 3B \end{matrix}$$

Por tanto:

$$X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos X^2 e Y^2 :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}; \quad Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego: } X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

HALLAR LAS MATRICES QUE COMUTAN CON UNA DADA

EJERCICIO 17 :

a) Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices que conmutan con A.

b) Escribe una matriz que conmute con A.

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 \\ 2c+d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 2a + b \\ 2b = 0 \\ a = 2c + d \\ b = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2c + d \end{array} \quad \text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 2c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbf{R}$$

$$b) \text{ Por ejemplo, si } c=1 \text{ y } d=1: X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

COMBINACIÓN LINEAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

EJERCICIO 18 : Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1), \vec{u}_2 = (2, 3, -2, 1), \vec{u}_3 = (1, 3, -1, -1)$$

Solución:

Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

RANGO DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 19 : Halla el rango de las siguientes matrices:

$$a) M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3 \cdot 2^a \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix} \quad \text{Por tanto, } \text{ran}(M) = 3.$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 5 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=2.$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=3.$$

$$d) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=2.$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \\ 4^a + 7 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M)=2.$$

EJERCICIO 20 : Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\bullet A \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3 \cdot 2^a \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ran}(A) = 3.$$

$$\bullet B \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Por tanto, $\text{ran}(B) = 2$.

$$\bullet C \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ran}(C) = 3.$$

$$\bullet D \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\text{ran}(D) = 2$.

$$\bullet E \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\text{ran}(E) = 2$.

EJERCICIO 21 :

a) Halla el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$\vec{u}_1 = (2, -1, 3, 4)$; $\vec{u}_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $\vec{u}_3 = (-1, 3, 4, 1)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 3 \cdot 1^a \\ 4^a + 4 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 3 \cdot 4^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 3. \end{aligned}$$

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

El número de vectores linealmente independientes es el rango de A. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

EJERCICIO 22 : Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores

$\{\vec{u}_1 = (2, -1, 0, 1); \vec{u}_2 = (-1, 0, 2, 1); \vec{u}_3 = (5, -4, 6, 7)\}$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 5 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, el rango de la matriz es } 2. \end{aligned}$$

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

EJERCICIO 23 : Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente

independientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 3 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en A ; las otras dos dependen linealmente de ellas.

EJERCICIO 24 : Estudiar el rango de las siguientes matrices, en función de los valores de los parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

• A: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^{\text{a}} - a \cdot 1^{\text{a}}} \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 4-a^2 & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$

Hacemos $4 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$

- Si $a = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } A = 1$
- Si $a = -2$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } A = 2$
- Si $a \neq \pm 2$, $\text{ran } C = 2$.

• B: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 2 & -a+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ a \cdot 3^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & -a^2+9a-14 \end{pmatrix}$

Hacemos $-a^2 + 9a - 14 = 0 \begin{cases} a = 7 \\ a = 2 \end{cases}$

- Si $a \neq 7$ y $a \neq 2$, $\text{ran } B = 3$
- Si $a = 7$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } B = 2$ Si $a = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } B = 2$

• C: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + (a-1)2^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & 0 & -3a^2+2a+1 \end{pmatrix}$

Hacemos $-3a^2 + 2a + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1/3 \end{cases}$

- Si $a = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } C = 2$ Si $a = -\frac{1}{3}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } C = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -\frac{1}{3}$, $\text{ran } C = 3$.

• D: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{a \cdot 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}}} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a^2 - a - 6 \end{pmatrix}$

Hacemos $a^2 - a - 6 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$

$$\circ \text{ Si } a = 3, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } D = 1$$

$$\text{Si } a = -2, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } D = 1$$

$$\circ \text{ Si } a \neq 3 \text{ y } a \neq -2, \text{ran } D = 2.$$

$$\bullet \text{ E: Aplicamos el método de Gauss: } \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2 \cdot 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & a+2 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila se anula si $a = 1$ y la segunda, si $a = -2$. Estudiamos estos dos casos:

$$\circ \text{ Si } a = 1, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } E = 2$$

$$\text{Si } a = -2, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } E = 2$$

Por tanto, $\text{ran } D = 2$ cualquiera que sea el valor de a .