Límites y continuidad de funciones

1. Calcular los siguientes límites de funciones:

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ (No existe)

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-x^2+7x+5\right)$ (- ∞)

c. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-4}{x+2}$ (No existe)

d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^3}+x^2+1}{3\sqrt{x^3}+2x^2-7}\right)$ (½)

e. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[x]{\dfrac{2x+1}{x+1}}$ (0)

f. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ (No existe)

g. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ (No existe)

h. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^2-6x+8}{-x^2-3x+1}$ (- 4)

i. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ (2)

j. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{1}{2x+2}\right)^{\frac{3-x^2}{x}}$ (0)

k. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ (2)

l $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$ (No existe)

m. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ (4/3)

n. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x-1-\sqrt{4x^2+4x-1}\right)$ (- 2)

o. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$ (2)

p. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ (1/4)

q. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{1-\sqrt{x+1}}$ (-4)

r. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ (+ ∞)

s. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (3/2)

t. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ (3)

u. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ (1/9)

v. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (-1/56)

w. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ (No existe)

x. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ (0)

y. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2+3}{3+2x+4x^2}\right)^{\frac{x^2-5}{3x}}$ (+ ∞)

z. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3+x^3}{2x^2+5}\right)^{3x+7}$ (+ ∞)

aa. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+4}\right)^{\frac{x^3-1}{3x+8}}$ (+ ∞)

bb. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{4x+5}{1+4x}\right)^{\frac{3x^2-2}{5x+8}}$ ($e^{3/5}$)

cc. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-1}{3x-5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ (0)

dd. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+3x-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-5}}}$ (- ∞)

ee. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ (1/2)

ff. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$ (0)

gg. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}$ (∞)

hh. $\lim_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

ii. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$ (-5/2)

jj. $\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ($3x^2$)

kk. $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{\dfrac{x}{3}+3}-2}$ (2)

ll. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+2}\right)$

2. Hallar $\lim_{x\to2}g(x)$ siendo $g(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad x>3 \\ \dfrac{x+2}{x-2} & si \quad x\le 3 \end{cases}$

3. Hallar los límites de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & si \quad x\le 3 \\ \dfrac{1}{3-x} & si \quad x>3 \end{cases}$ en x = -1 y x = 3.

4. Determinar el valor de ***a*** para que se verifique $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$.

5. ¿Qué valor hay que dar a ***m*** para que $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2+mx-6}{3x-9}$ sea finito? ¿Cuánto vale entonces dicho límite?

6. Averiguar el valor de ***a*** para que la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \quad x<-1 \\ x^2+a & si \quad x\ge -1 \end{cases}$ sea continua.

7. Hallar el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-(x+2)^2}{x} & si \quad x\ne 0 \\ k & si \quad x=0 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

8. Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq 0 \\ x-1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & si \quad x \leq 2 \\ 2x-6 & si \quad x > 2 \end{cases}$

c. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 4 & si \quad x = 2 \end{cases}$

d. $i(x) = E[x]$

e. $j(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3} & si \quad x < -1 \\ 2x+2 & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

f. $k(x) = x - E[x]$

9. Deseamos transportar **x** litros de vino desde una bodega a la planta embotelladora. El transporte se realiza en una furgoneta con capacidad para 500 litros. Cada viaje de la furgoneta cuesta 18 euros. Llamando **p** al precio por litro transportado, escribir la función p(x) y representarla en el intervalo [200,1500]. ¿Dónde tiene discontinuidades esta función?

10. Tras un estudio demográfico, se ha determinado que el número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \dfrac{14500x + 7200}{2x+1}$, donde x es el número de años transcurridos de ahora en adelante.
    a. ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?
    b. ¿Y dentro de dos años?
    c. Si se supone que la función fuese válida de forma indefinida, ¿crees que la población crecería de forma indefinida? Justifica la respuesta.

11. Una empresa dedicada a montajes en cadena ha determinado que el número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, de acuerdo con la función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$, donde t es el tiempo en días.
    a. ¿Cuántos montajes realiza el primer día?
    b. Justificar que el número de montajes crece al tiempo que los días de entrenamiento.
    c. ¿Qué ocurriría con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento?

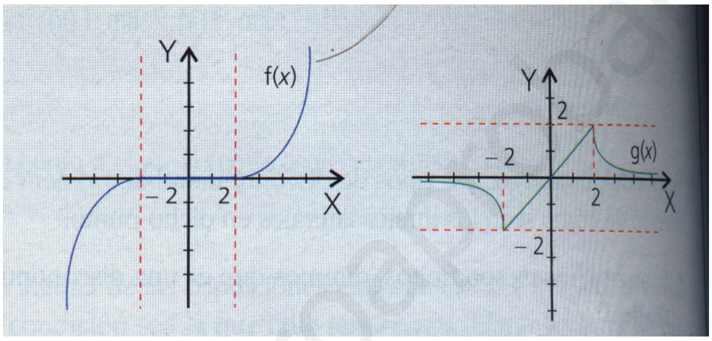
12. En cierto país, las tarifas del servicio de correos son las siguientes:
    - Cartas hasta 20 gramos de peso: 32 céntimos.
    - Por cada 10 gramos o fracción de 10 gramos de exceso de peso, se añaden 5 céntimos más.
    a. Escribir y representar gráficamente la función.
    b. Estudiar su continuidad.

13. Un almacén tiene la siguiente tarifa de precios para la venta de paquetes de un producto: de 1 a 50 paquetes, el precio del paquete es de 2'5 euros; de 51 a 100 paquetes, el precio del paquete es de 2'2 euros, y si el número de paquetes es igual o mayor que 101 el precio por paquete es de 2 euros.
    a. Escribir la función que relaciona el número de paquetes con el precio.
    b. Encontrar los puntos de discontinuidad si los tiene.

14. La fusión de dos cadenas de centros comerciales en el año 2001 produce unos beneficios anuales en millones de euros, según la función $f(x) = 80 + \dfrac{100x}{x+20}$, siendo x el número de años transcurridos desde la fusión. ¿Qué beneficio obtendrán en el año 2005? Si se supone que los beneficios se mantienen de forma indefinida según f(x) ¿a qué cantidad se aproximan los beneficios?

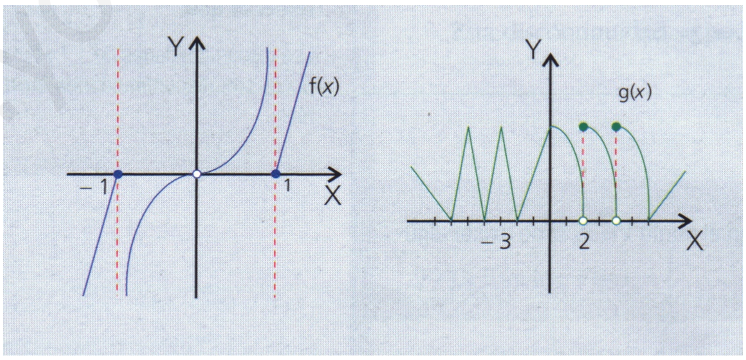
15. Calcular los límites indicados en cada una de las gráficas siguientes:

a.



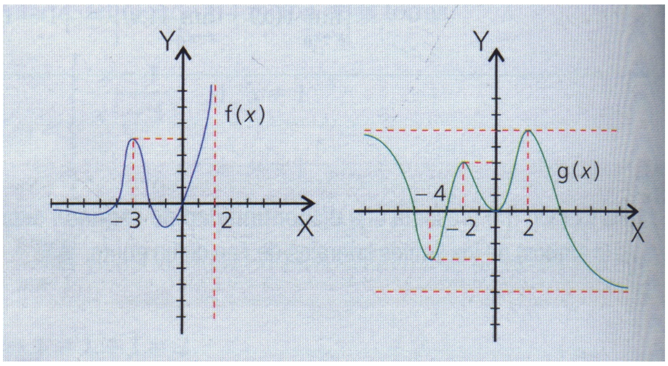
1) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
5) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ 6) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ 7) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

b.



1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 6) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ 7) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

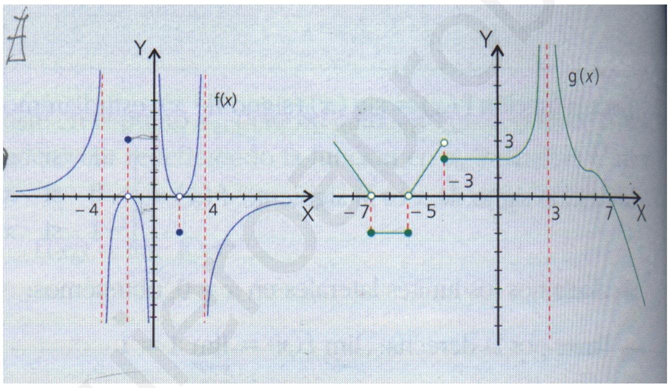
c.



1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ 6) $\lim\limits_{x \to -4} g(x)$ 7) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ 8) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

d.



1) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

5) $\lim\limits_{x \to -7^-} g(x)$ 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ 7) $\lim\limits_{x \to -5^+} g(x)$ 8) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$