UNIDAD 8.- **Funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas**

1. FUNCIÓNES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

Son funciones de la forma $f(x) = mx + n$ ó $y = mx + n$ donde:

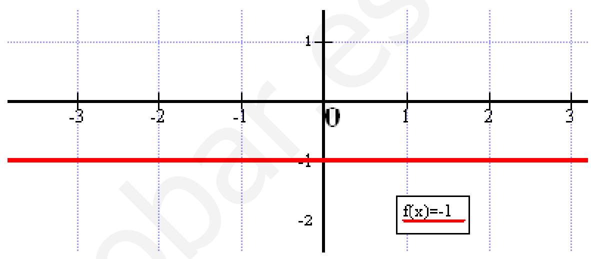
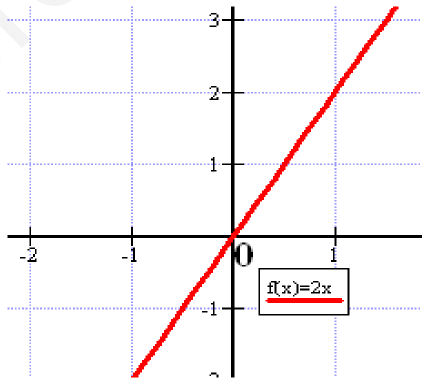
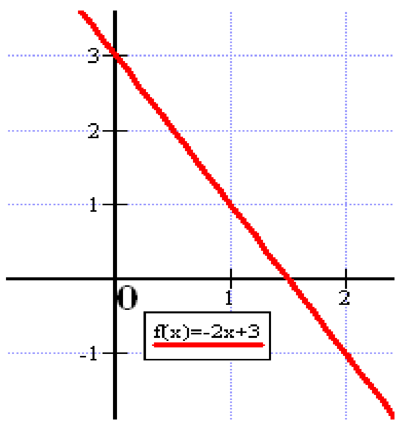
m : se llama *pendiente* de la recta

n : se llama *ordenada en el origen*. La recta pasa por el punto $(0, n)$

Ya sabemos que su representación gráfica es una recta

Para representarlas gráficamente es suficiente con una tabla de valores.

En la siguiente tabla se representan los diferentes tipos:

Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x) = k$ Su gráfica es una recta horizontal La pendiente $m = 0$	$y = -1$ Dom(y) = R Im(y) = {-1}	
Lineales $f(x) = mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas O(0,0) La ordenada en el origen $n = 0$	$f(x) = 2x$ Dom(f) = R Im(f) = R	
Afines $f(x) = mx + n$ Su gráfica es una recta inclinada La pendiente y la ordenada en el origen no son nulas $m \neq 0$ y $n \neq 0$	$f(x) = -2x + 3$ Dom(f) = R Im(f) = R La recta pasa por el punto (0,3)	

Propiedad importante: Si una recta pasa por los puntos $A(a,b)$ y $B(c,d)$, la pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{d - b}{c - a}$$

Ejemplo. Representa gráficamente las rectas:

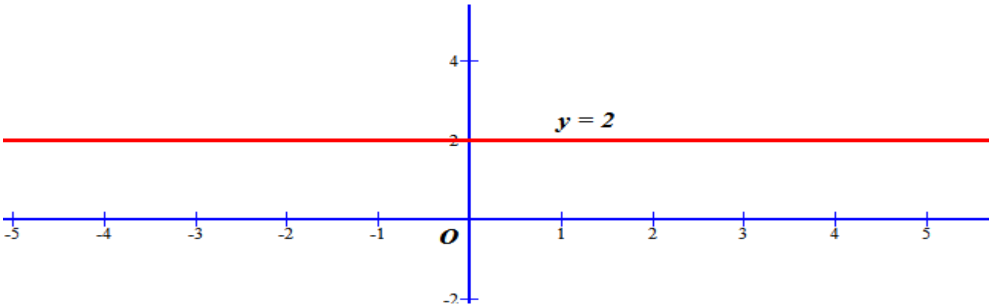
a)

$f(x)=2$

Es una recta horizontal

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	2	2	2

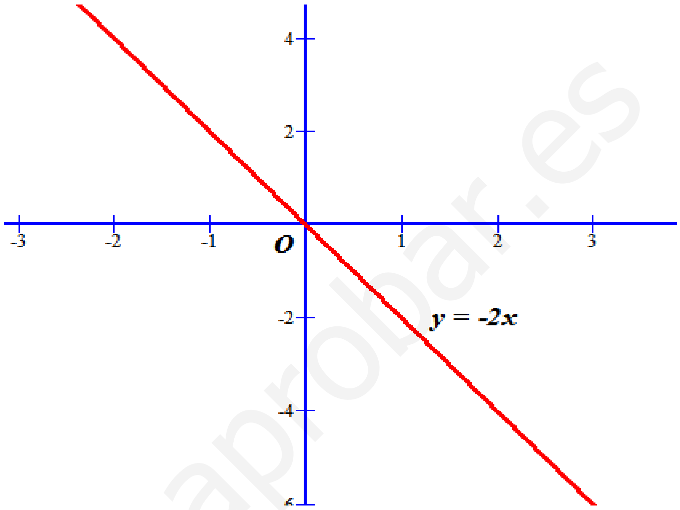


b)

$f(x)=-2x$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	0	-2	2

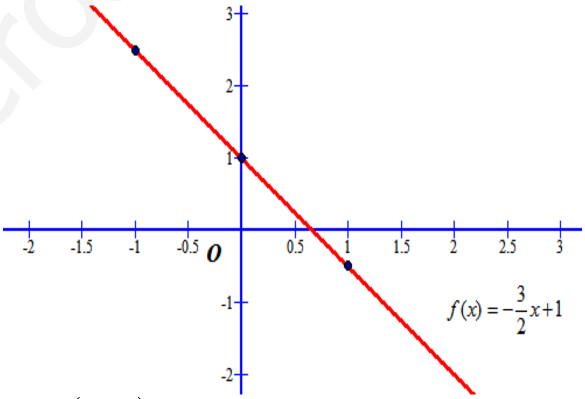


c)

$f(x)=-\frac{3}{2}x+1$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	1	-1/2	5/2

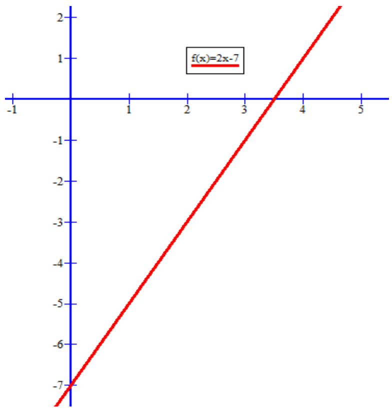


Ejemplo: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-3)$ y tiene por pendiente 2 y representarla gráficamente.

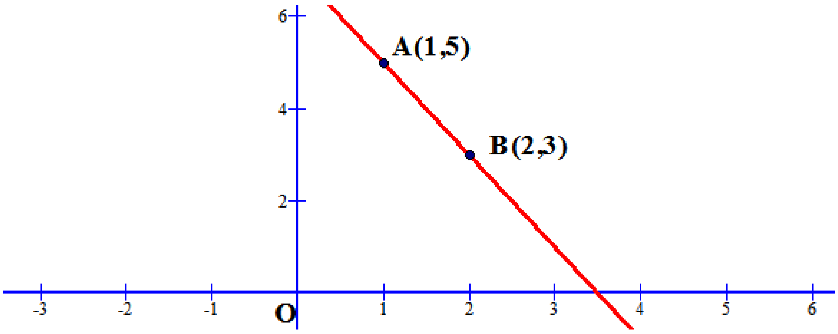
La recta tiene que ser de la forma $y=mx+n$, de donde ya conocemos la pendiente $m=2 \rightarrow\ y=2x+n$

Como pasa por el punto $(2,-3)$, se ha de verificar la ecuación al sustituir la *x* por 2 y la *y* por 3 →

$-3=4+n \rightarrow\ n=-7$. La recta es: $y=2x-7$ y su gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Dada la recta cuya gráfica es la siguiente, calcular su ecuación o criterio.



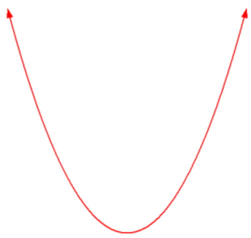
Al tratarse de una recta su ecuación o criterio será de la forma: $y = m{\cdot}x + n$. Como observamos pasa por los puntos A(1,5) y B(2,3) y sustituimos en la ecuación y planteamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para calcular m y n: $\begin{cases} 5 = m\cdot 1 + n \\ 3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 5 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 7 \end{cases}$. Por tanto se trata de la recta

$f(x) == -2{\cdot}x + 7$

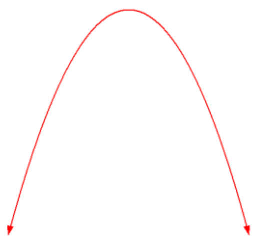
Nota: la pendiente la podíamos haber calculado por la fórmula dada en la propiedad $m = \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{3-5}{2-1} = -2$

2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
Su dominio es todo R y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó

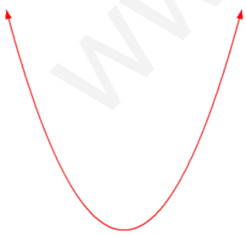


Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) Estudio de la curvatura u orientación

Lo calculamos a partir del signo del coeficiente a

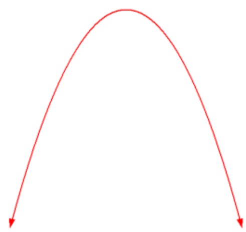
$a > 0$



Se dice que la parábola es CONVEXA

ó

$a < 0$



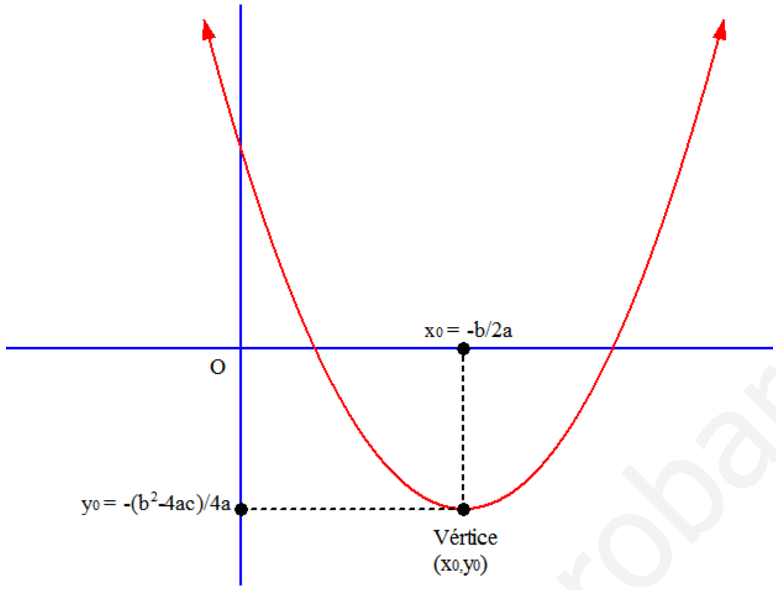
Se dice que la parábola es CÓNCAVA

b) Cálculo del vértice

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando $a < 0$ y mínimo cuando $a > 0$)

El vértice V tiene por abscisa $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, y su ordenada y_0 se obtiene de la ecuación, resultando, para quien quiera saberlo de memoria $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

En la figura se representa el vértice de una parábola con $a > 0$ (es un mínimo absoluto)



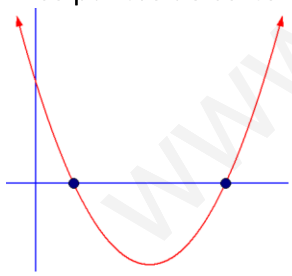
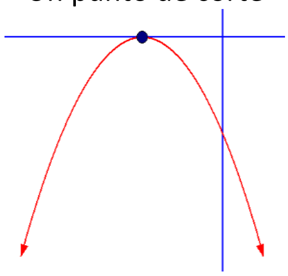
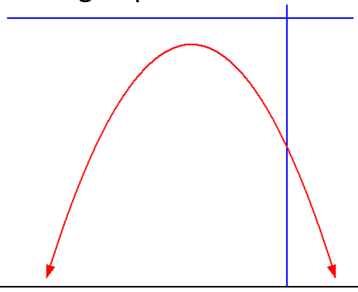
c) *Puntos de corte con eje OX*

Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$, que nos lleva a la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual puede ocurrir que:

- *Tenga dos soluciones*: Hay dos puntos de corte con el eje OX
- *Tenga una única solución*: Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX
- *No tenga ninguna solución*: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

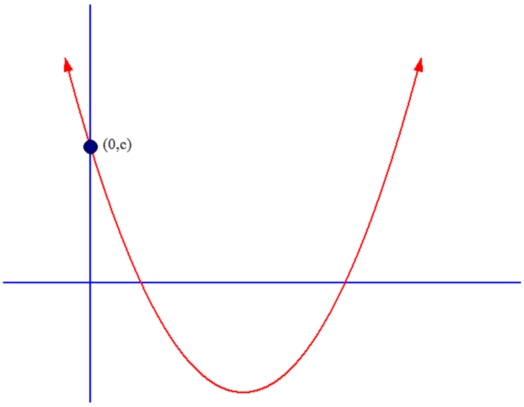
Dos puntos de corte	Un punto de corte	Ningún punto de corte
		

d) *Punto de corte con eje OY*

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, que es trivial de resolver y nos resulta $\begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$. Por tanto, siempre es el punto $(0, c)$

Gráficamente,

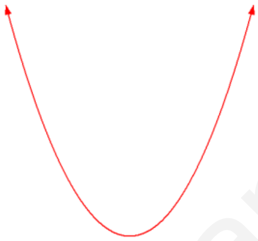


e) Tabla de valores

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

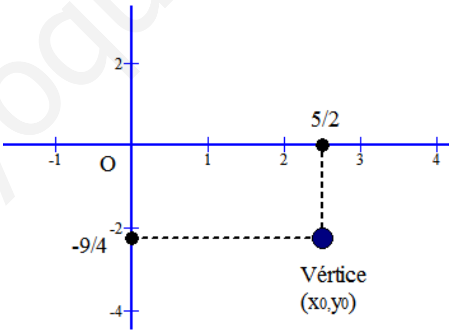
Ejemplo: Realizar la representación gráfica de la parábola $y = x^2 - 5x + 4$

Curvatura: Como $a = 1 > 0$, tenemos que la parábola es convexa

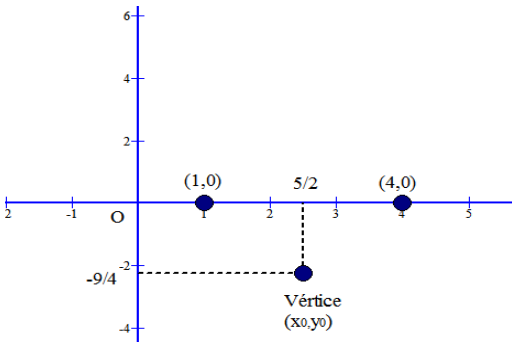


Vértice: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$ Calculamos el correspondiente $y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{-9}{4}$ (sustituyendo en la fórmula o criterio de la función)

El vértice es $V\left(\frac{5}{2}, \frac{-9}{4}\right)$



Cortes eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$ → $x^2 - 5x + 4 = 0$ → $x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$



Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c)=(0,4)$

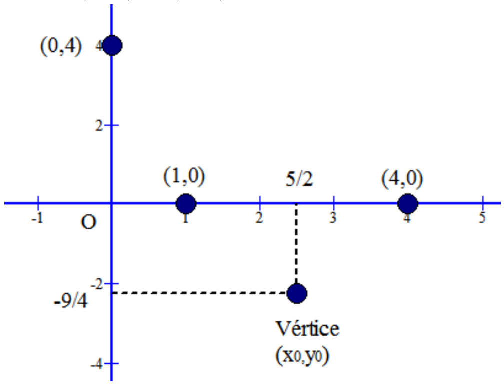
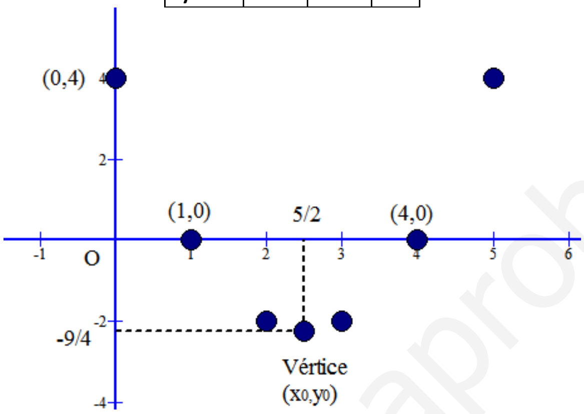
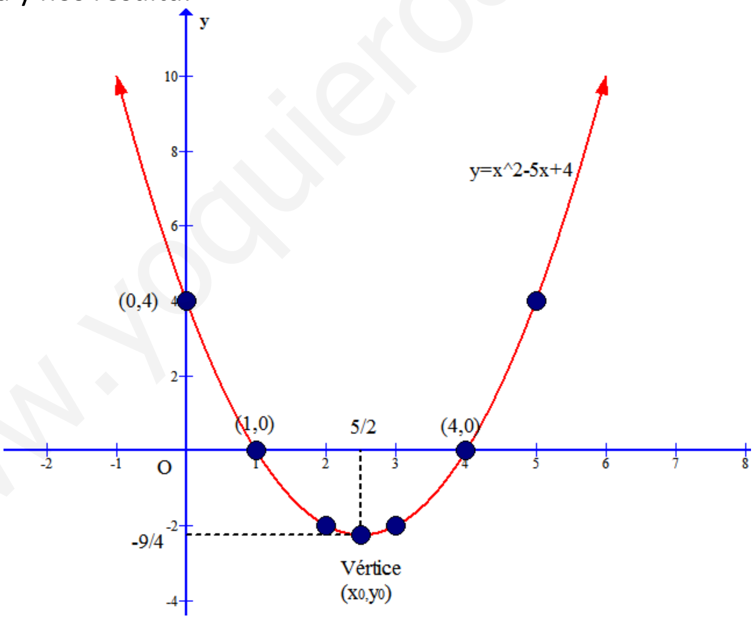


Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4

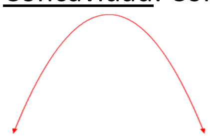


Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Re}\,corr(f)=\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$

Ejemplo: Lo mismo para la función $y=-2x^2-1$

Concavidad: Como $a=-2<0$, es cóncava 	Vértice: $x_0=\frac{-0}{2\cdot(-2)}=0 \rightarrow y_0=-1$ Luego $V(0,-1)$

Corte eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y=-2x^2-1 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow$

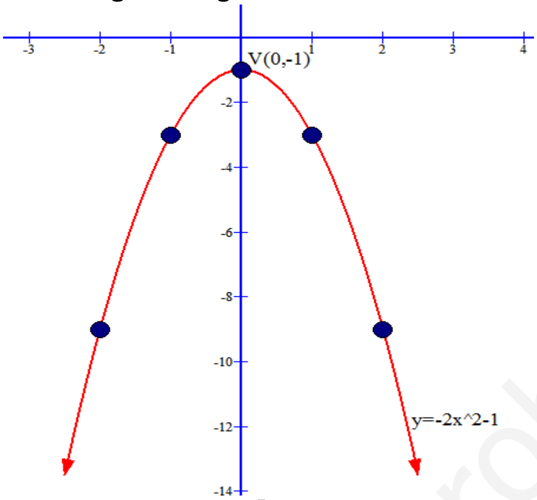
$-2x^2-1=0$ → No existen soluciones, no hay cortes

Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c)=(0,-1)$. Coincide con el vértice

Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

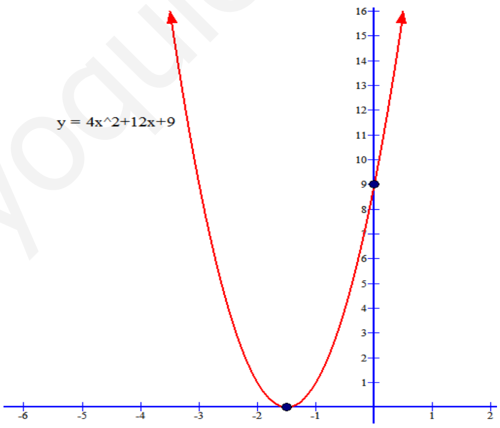
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,-1]$

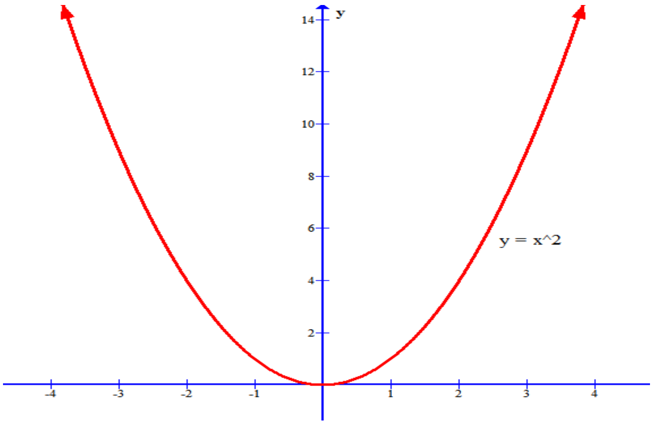
Ejemplo: Ídem para $y=4x^2+12x+9$

Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\frac{-3}{2},0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Re}\,corr(f)=[0,+\infty)$

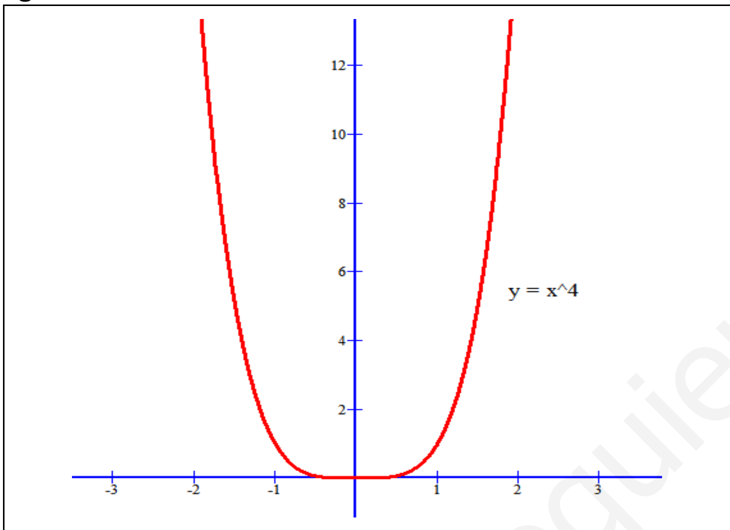
NOTA: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x)=x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:

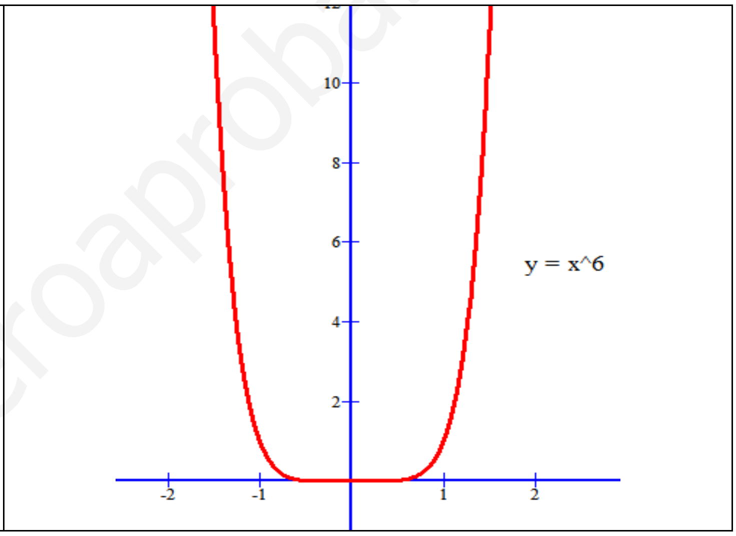


3. FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE NATURAL

a) Funciones potenciales de exponente natural par

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es par, por ejemplo como $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, etc. Su dominio es todo R al ser polinómicas y su gráfica es muy parecida a la de una parábola. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:



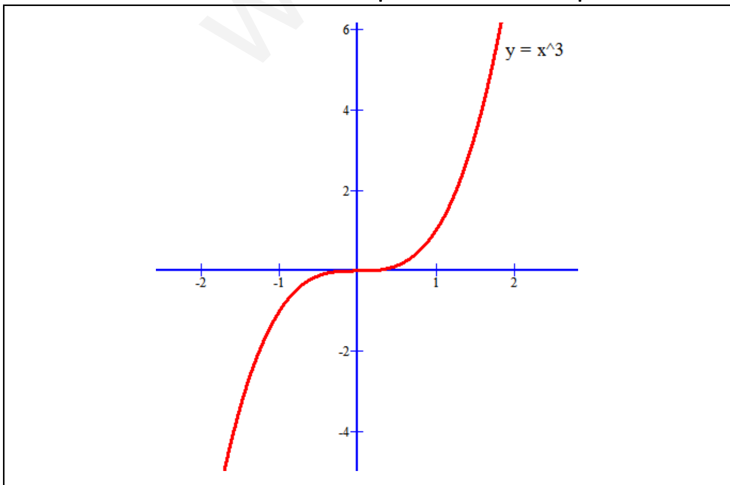


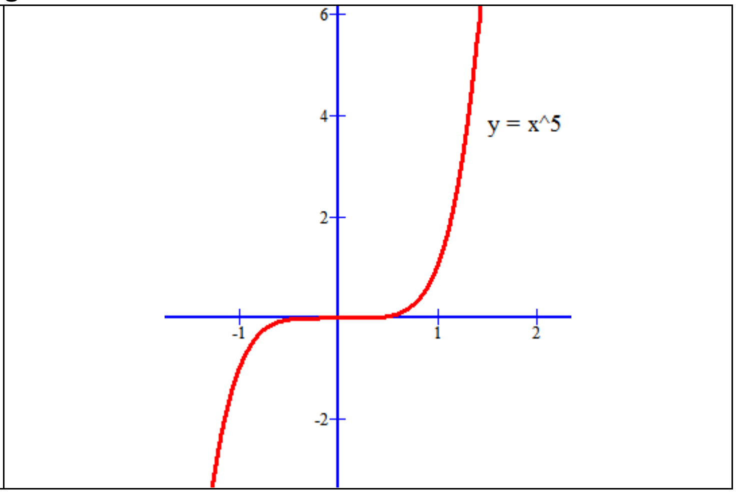
Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x) = f(-x)$

Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im}(f) = [0,+\infty)$

b) Funciones potenciales de exponente natural impar

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es impar, por ejemplo como $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, etc. Su dominio es todo R al ser polinómicas. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:



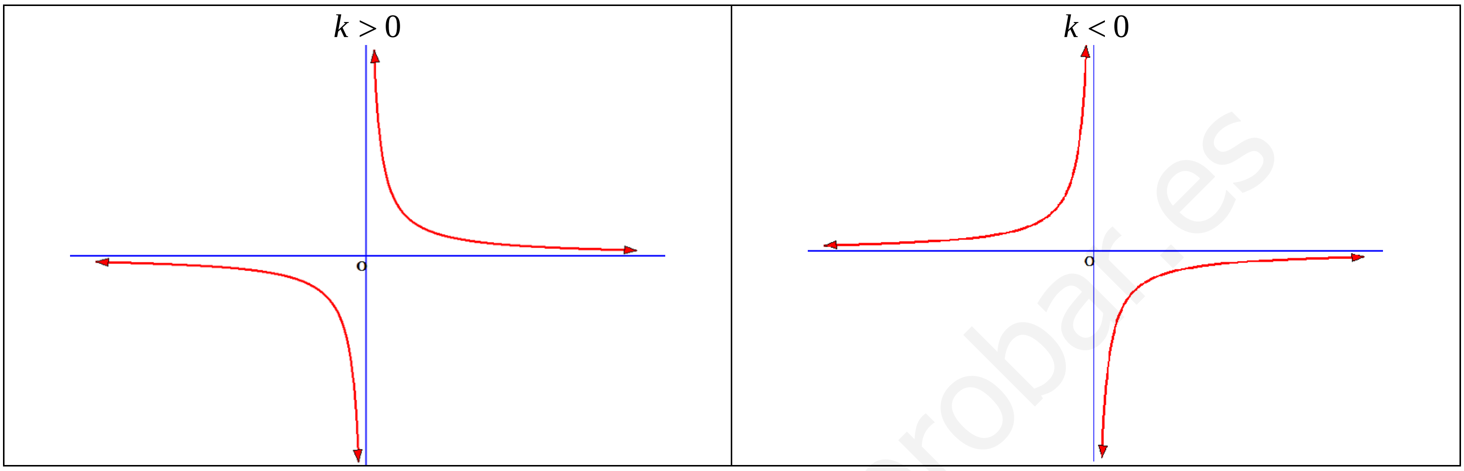


Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x) = -f(-x)$
No están acotadas. Su imagen es todo R

4. FUNCIÓNES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Las *funciones de proporcionalidad inversa* son funciones cuya expresión es de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$

Las gráficas de estas funciones son o se llaman *hipérbolas equiláteras* cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Pueden ser de estas dos formas:



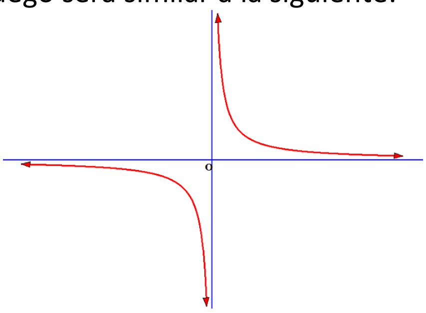
Propiedades: Estas funciones tienen las siguientes propiedades

- *Dominio*: Se tiene que $Dom(f) = R - \{0\}$
- *Recorrido*: Se tiene que $\mathrm{Im}(f) = R - \{0\}$
- *Monotonía*: Se tiene que:
  - *Si* $k > 0$, la función es estrictamente decreciente en todo su dominio
  - *Si* $k < 0$, la función es estrictamente creciente en todo su dominio
- *Extremos relativos*: No tienen
- *Acotación*: No están acotadas ni superior ni inferiormente
- *Simetría*: Son funciones impares, es decir, presentan simetría respecto del origen de coordenadas
- *Asíntotas*: Se tiene que:
  - El eje OY (la recta $x = 0$) es asíntota vertical por la derecha a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$ si $k > 0$. Al contrario, es asíntota vertical por la derecha a $-\infty$ y por la izquierda a $+\infty$ si $k < 0$
  - El eje OX (la recta $y = 0$) es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$

Representación gráfica: Para dibujar este tipo de funciones hay que tener en cuenta el signo de k y hacer una tabla de valores, teniendo en cuenta las propiedades anteriores. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo: Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{2}{x}$

En este caso tenemos que $k = 2 > 0$, luego será similar a la siguiente:

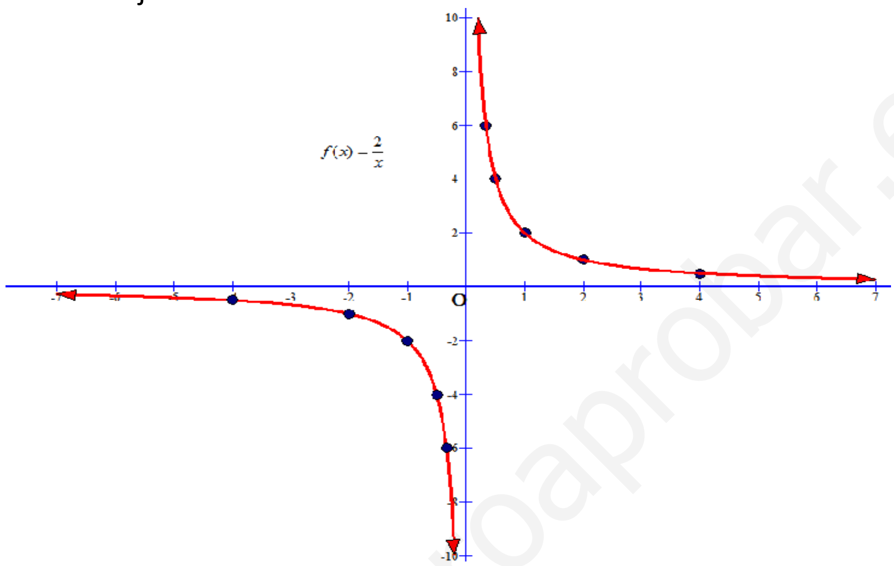


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}=-0{\acute{}}5$	$\frac{2}{-2}=-1$	$\frac{2}{-1}=-2$	$\frac{2}{-1/2}=-4$	$\frac{2}{-1/3}=-6$	$\frac{2}{1/3}=6$	$\frac{2}{1/2}=4$

x	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$	2	1	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{\acute{}}5$

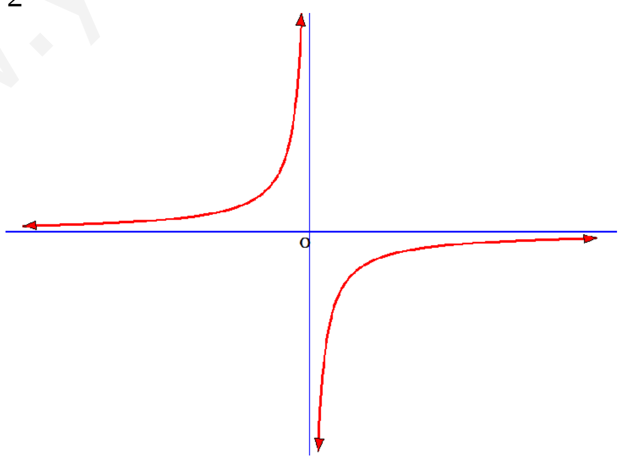
Y pasamos directamente a dibujarla:



Ejemplo: Representa gráficamente la función $y=\frac{-1}{2\cdot x}$

Hemos de darnos cuenta que la función se puede poner como $y=\frac{-1/2}{x}$

En este caso tenemos que $k=\frac{-1}{2}<0$, luego será similar a la siguiente:

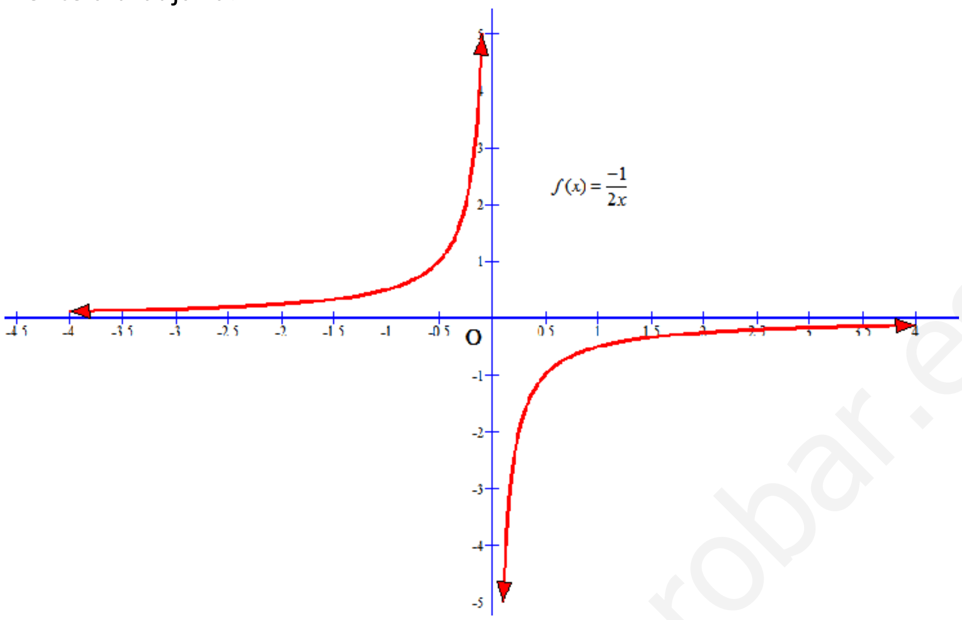


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{1}{8}=0{\acute{}}125$	$\frac{1}{4}=0{\grave{}}25$	$\frac{1}{2}=0{\grave{}}5$	1	$\frac{3}{2}=1{\grave{}}5$	$\frac{-3}{2}=-1{\grave{}}5$	-1

x	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{-1}{2}=-0`5$	$\frac{-1}{4}=-0`25$	$\frac{-1}{8}=-0´125$

Y pasamos directamente a dibujarla:



5. FUNCIONES DE LA FORMA $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$

Las gráficas de las funciones del tipo $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ son también hipérbolas equiláteras.
En estos casos, las asíntotas que tiene son las siguientes:

- Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: la recta de ecuación $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$
- Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: la recta de ecuación $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$

Ejemplo: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$

Por lo anterior tenemos que:

Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: $y=\dfrac{2}{1}\Rightarrow y=2$

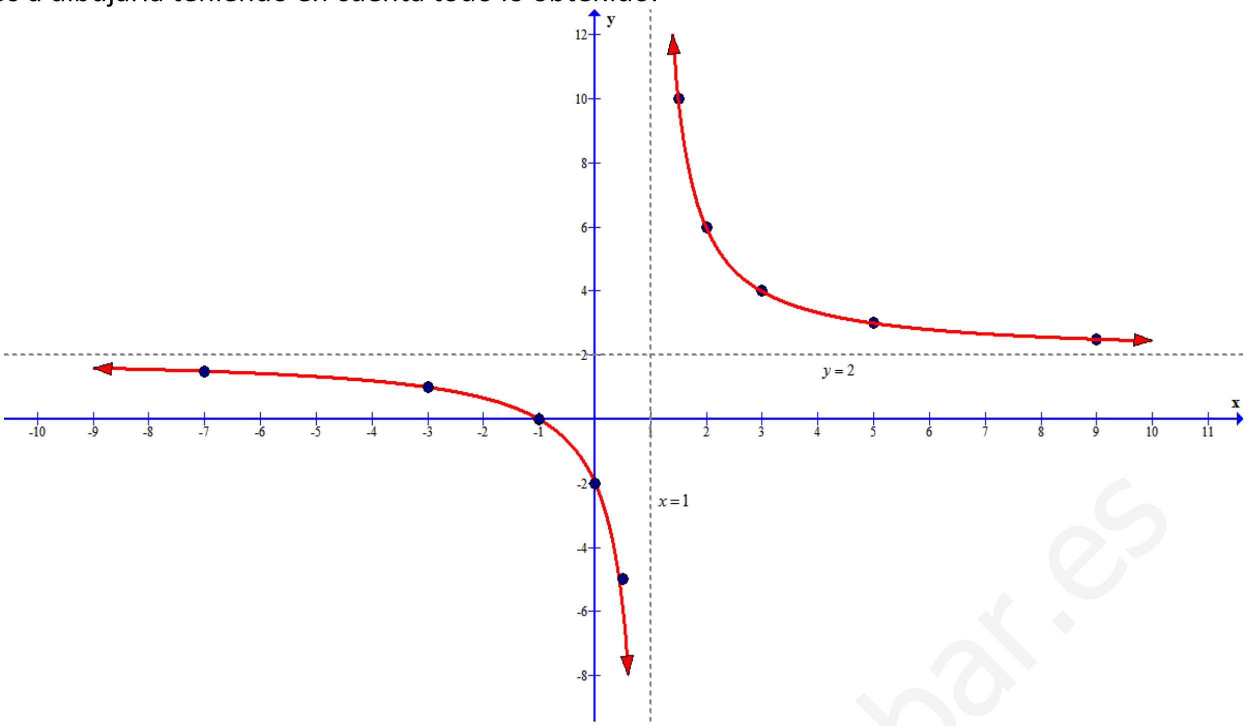
Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: $x=-\dfrac{-1}{1}\Rightarrow x=1$

Construimos una tabla de valores para conocer por donde se representa la hipérbola equilátera.

x	-7	-3	-1	0	0,5	1,5	2
$y=\frac{2x+2}{x-1}$	1,5	1	0	-2	-5	10	6

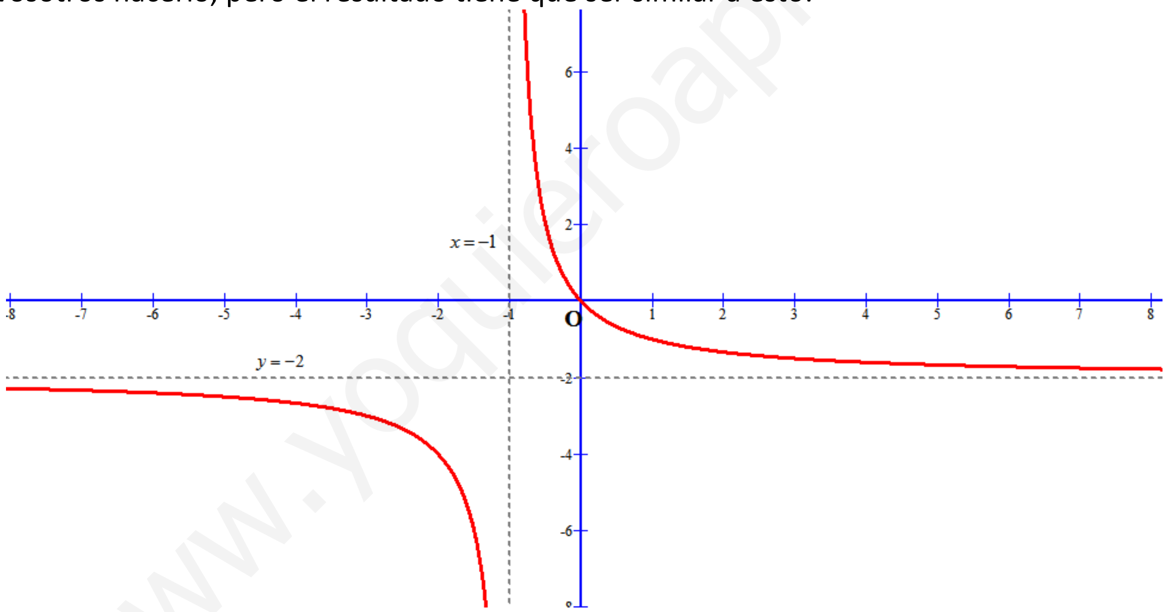
x	3	5	9
$y=\frac{2x+2}{x-1}$	4	3	2,5

Pasamos a dibujarla teniendo en cuenta todo lo obtenido:



Ejemplo: Representar gráficamente la función $y = \dfrac{-6x}{3x+3}$

Os dejo a vosotros hacerlo, pero el resultado tiene que ser similar a esto:



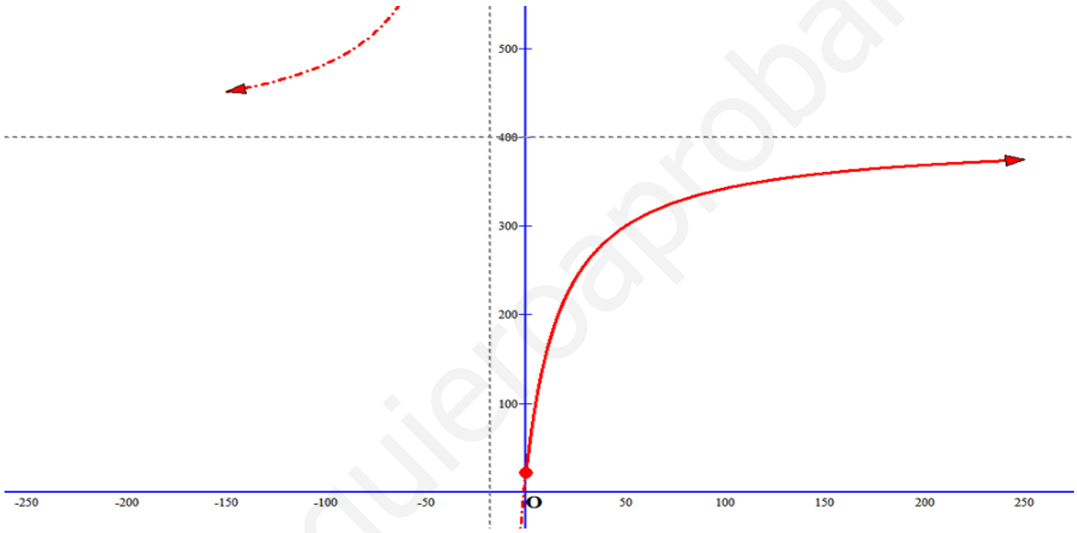
Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{400x+400}{x+18}$ nos da el número de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear un ordenador en función del número de clases particulares, de una hora, a las que asiste.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto da al comienzo de las clases y cuántas dará al cabo de 3, 5 y 20 clases recibidas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) Representa la gráfica de la función.
d) A la vista de la gráfica, responde a las siguientes cuestiones:
    1. ¿A partir de qué número de clases alcanza más de 300 pulsaciones por minuto?
    2. ¿Qué nº de clases debe recibir para alcanzar las 500 pulsaciones por minuto?
    3. ¿Qué nº máximo de pulsaciones por minuto puede llegar a alcanzar?

a) Al comienzo de las clases, como *x* = 0 horas, resultan $f(0)=\dfrac{400\cdot 0+400}{0+18}=22.2$ pulsaciones por minuto. Para 3 clases tenemos $f(3)=\dfrac{400\cdot 3+400}{3+18}=76{,}2$ pulsaciones por minuto. Para 5 clases nos da $f(5)=\dfrac{400\cdot 5+400}{5+18}=104{,}3$ pulsaciones por minuto y para 20 clases nos resulta $f(20)=\dfrac{400\cdot 20+400}{20+18}=221{,}1$ pulsaciones por minuto.

b) Para alcanzar las 300 pulsaciones por minuto debe practicar *x* horas, de modo que resolvemos la ecuación: $\dfrac{400\cdot x+400}{x+18}=300 \rightarrow 300\cdot(x+18)=400\cdot x+400 \rightarrow x=50$ horas

c) Vamos a representarla gráficamente con los puntos obtenidos anteriormente y con sus asíntotas
Asíntota horizontal: $y=400$
Asíntota vertical: $x=-18$
En trazo discontinuo la parte de la hipérbola que no interesa para el problema. Sólo nos interesa a partir de *x* = 0



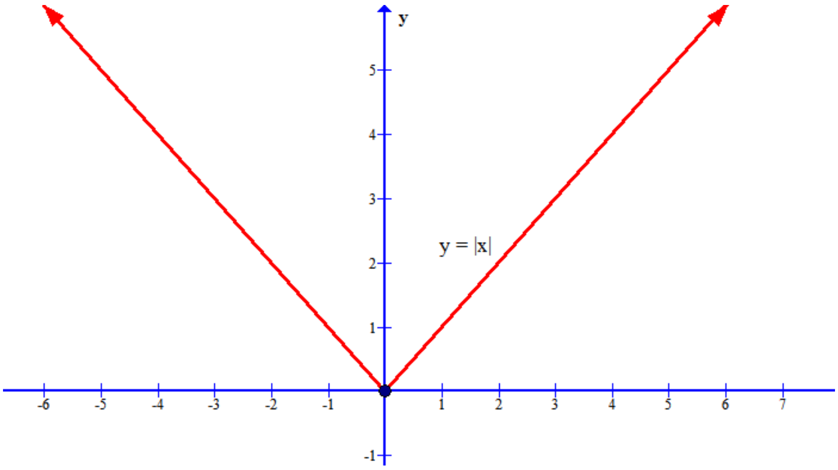
d) Tenemos que:
   1. Alcanza más de 300 pulsaciones/min al recibir más de 50 clases.
   2. Observando la gráfica vemos que nunca alcanzará las 500 pulsaciones/min.
   3. El nº máximo de pulsaciones por minuto que puede llegar a alcanzar se acerca a 400 que es su asíntota horizontal

6. <u>FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO</u>

La función valor absoluto se define por partes de la siguiente forma: $|x|=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ x & si \quad x>0 \end{cases}$. Es decir, es la función que toma un nº real y devuelve el nº positivo correspondiente.

<u>*Ejemplos*</u>: $|5|=5$, $|0|=0$, $|-7|=7$, $\left|\dfrac{-6}{7}\right|=\dfrac{6}{7}$

Tenemos que su dominio es todo R.
Su gráfica es la siguiente:



Y como vemos su imagen es $\mathrm{Im}(|x|) = [0,+\infty)$

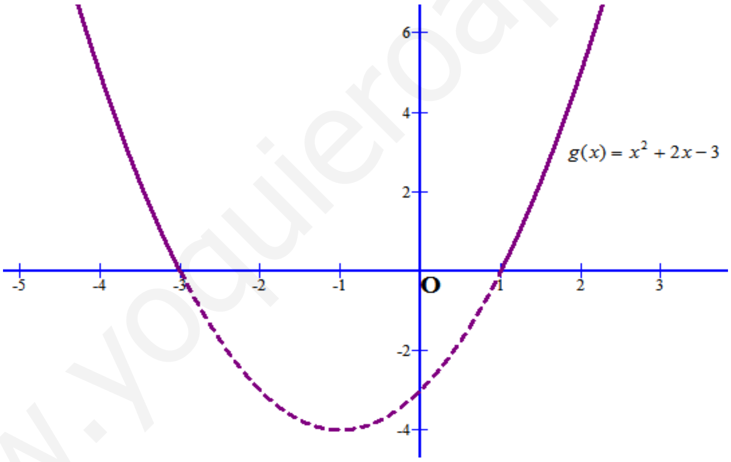
Está acotada inferiormente pero no superiormente, teniendo un mínimo absoluto en O(0,0).
Cumple además que:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

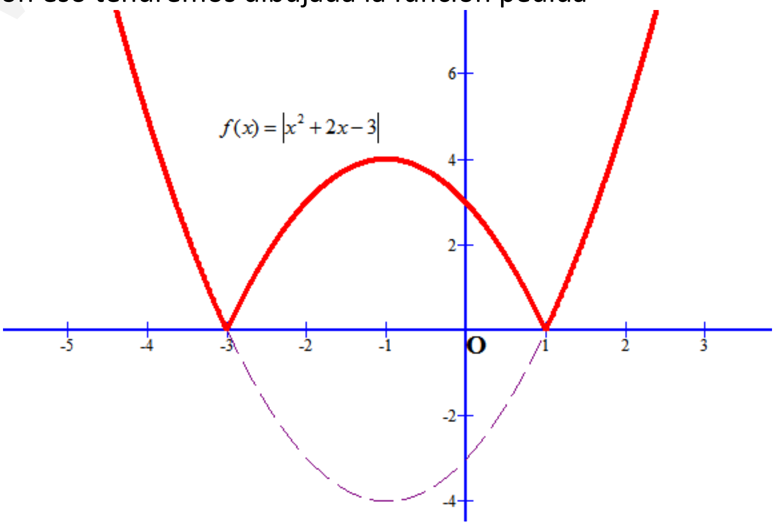
NOTA IMPORTANTE: Una vez conocido lo anterior, podemos dibujar o representar funciones de la forma $y = |f(x)|$, conociendo la gráfica de la función $y = f(x)$, simplemente transformando las imágenes negativas en positivas, como vemos en el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

Para ello representamos primero la función cuadrática $g(x) = x^2 + 2x - 3$ como ya sabemos:



Y lo único que hemos de hacer ahora es la parte discontinua de la gráfica anterior (que es la negativa) convertirla en positiva y con eso tendremos dibujada la función pedida

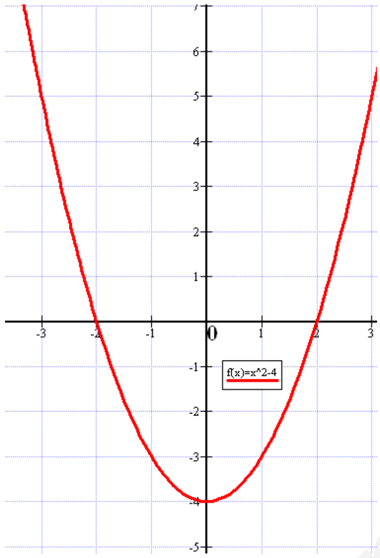


Ejemplo: Dada la función $f(x)=\left|x^2-4\right|-3$, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

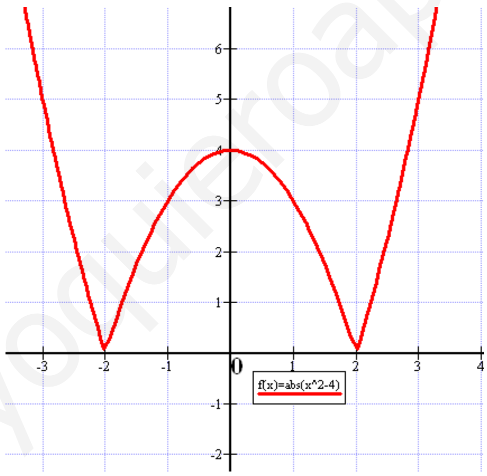
El dominio de $|g(x)|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y después restamos 3, podemos concluir que $Dom(f)=R$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

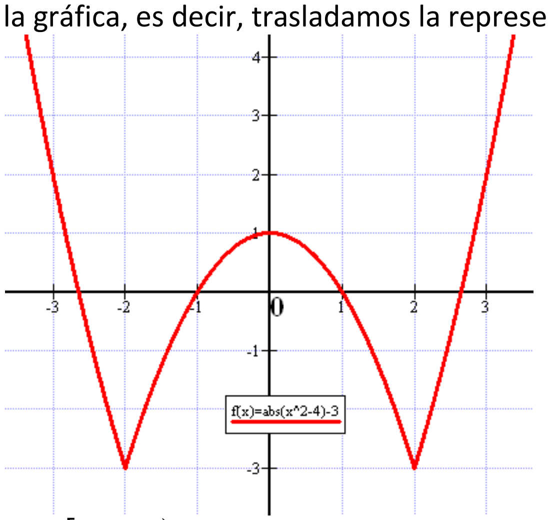
Paso1: Dibujamos la parábola $g(x)=x^2-4$, como sabemos, con curvatura, vértice, cortes, etc.



Paso 2.- El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de x^2-1 que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3.- Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo



Ya podemos concluir que $\mathrm{Re}corr(f)=[-3,+\infty)$

7. FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES O A TROZOS

Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente "*x*" pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Sea la función $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\le -1 \\ x^2-4x & si \quad x>0 \end{cases}$ Vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su recorrido

Dominio

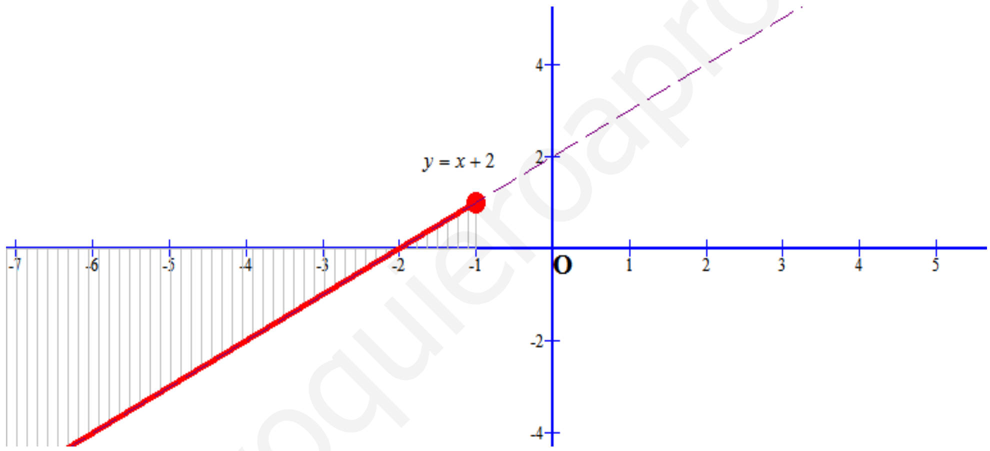
Si $x \le 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), luego el intervalo $(-\infty,1]$ es una parte del dominio.

Si $x>0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), luego el intervalo $(0,+\infty)$ es una parte del dominio.

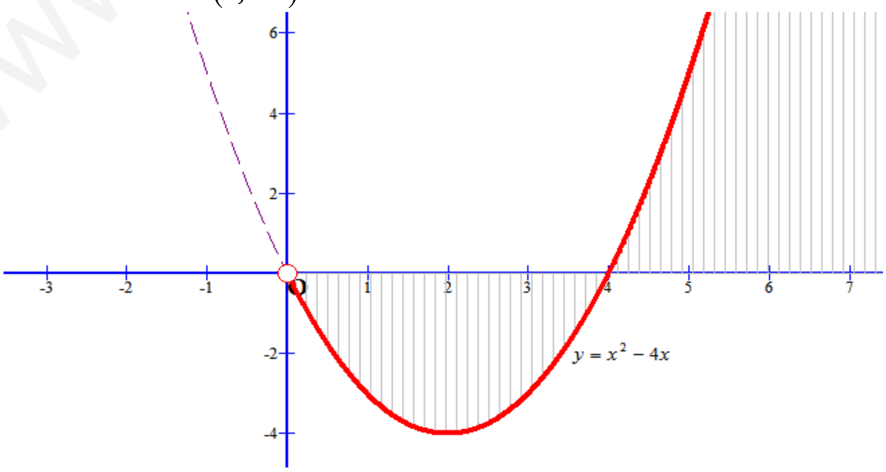
Podemos concluir que el dominio es: $Dom(f)=(-\infty,1]\cup(0,+\infty)$

Representación gráfica

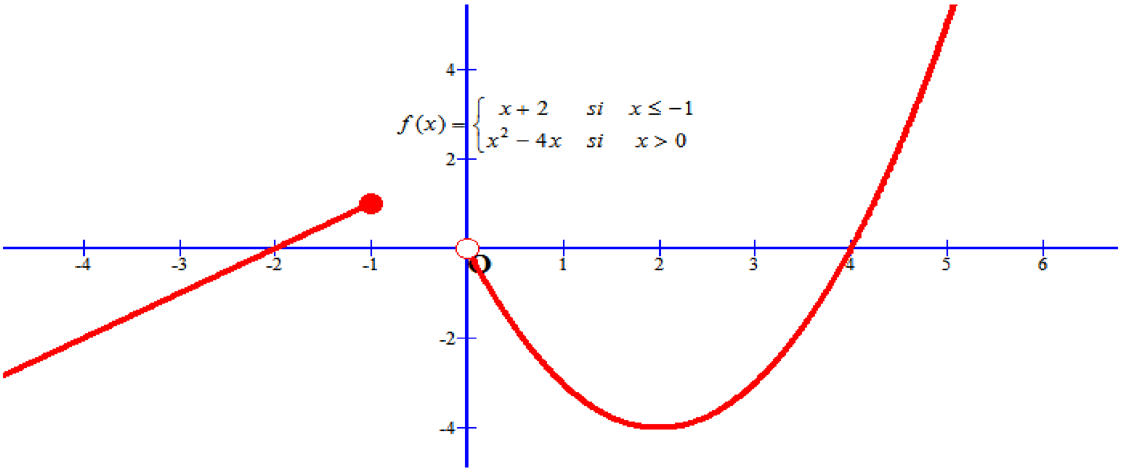
Si $x \le 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), $y=x+2$, dibujamos por tanto la recta y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(-\infty,1]$



Si $x>0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), $y=x^2-4x$, dibujamos por tanto la parábola (vértice, puntos de corte, etc.) y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(0,+\infty)$.



Ahora, nos queda sólo fusionar las dos gráficas y tendremos la representación gráfica de $f(x)$



Recorrido
Observando la gráfica podemos decir que $\mathrm{Im}(f)=R$

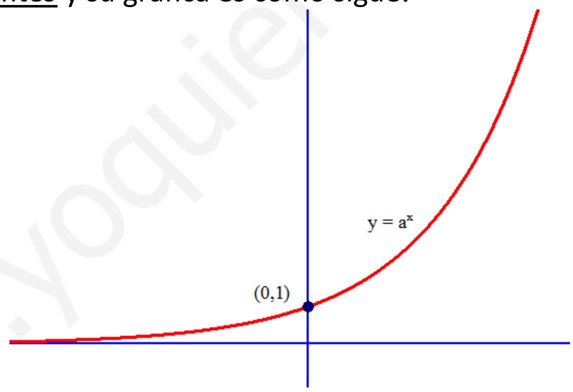
8. **FUNCIÓNES EXPONENCIALES**

Son funciones de la forma $f(x)=a^x$ donde $a>0$ y $a\neq 1$.
Su dominio es todo R y van a estar acotadas inferiormente por 0, que es su ínfimo.
Todas pasan por el punto $(0,1)$
Su imagen es $\mathrm{Im}(a^x)=(0,+\infty)$

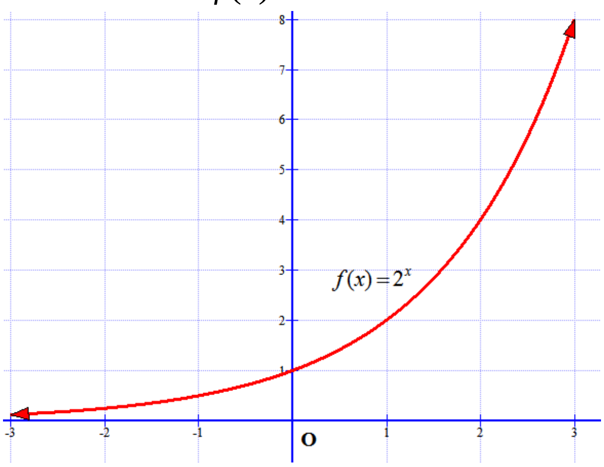
Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a>1)$

En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:

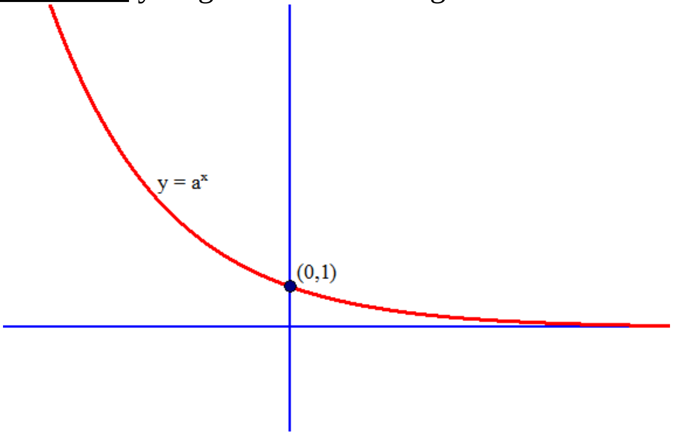


Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x)=2^x$

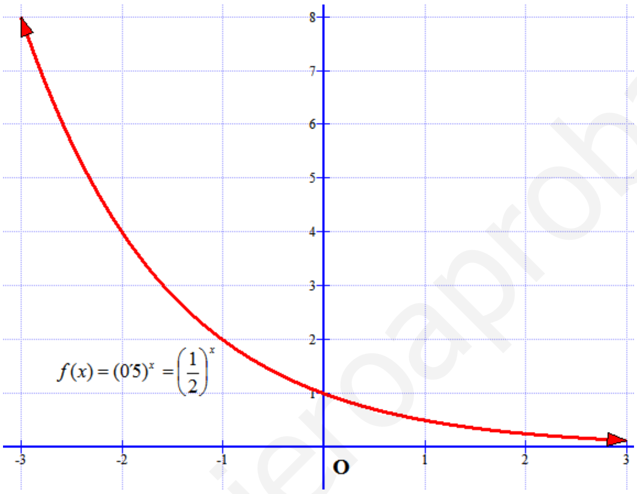


b) <u>La base</u> a <u>entre 0 y 1</u> $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones *<u>decrecientes</u>* y su gráfica es como sigue:



<u>Ejemplo</u>: Representamos gráficamente la función $f(x) = (0'5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



9. <u>FUNCIONES LOGARÍTMICAS</u>

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a) = (0, +\infty) = R^+$

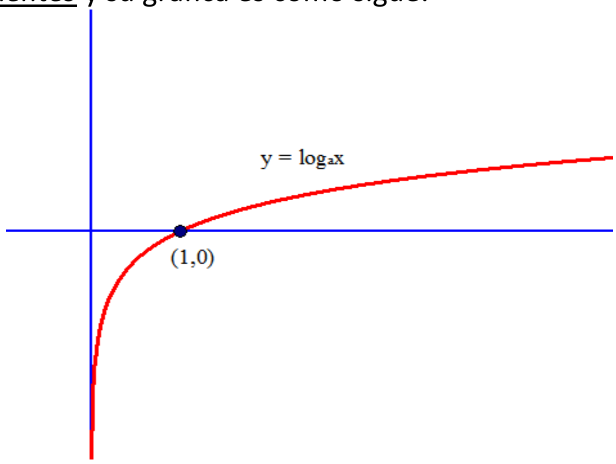
Todas pasan por el punto $(1,0)$

Su imagen es todo R

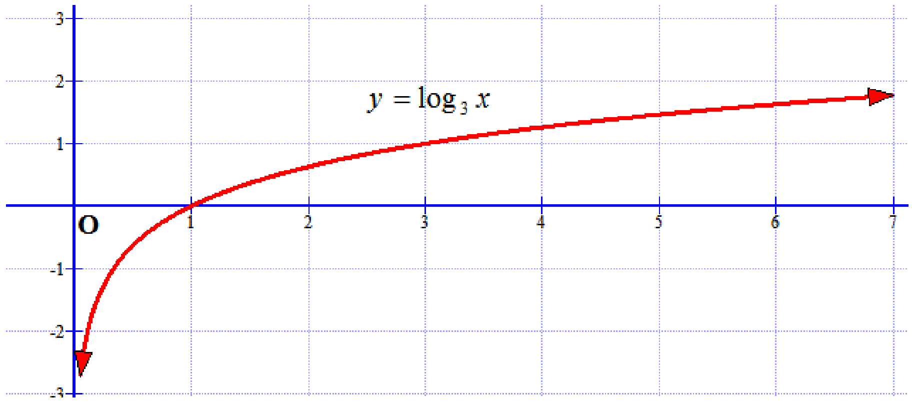
Vamos a distinguir dos casos:

a) <u>La base</u> a <u>mayor que 1</u> $(a > 1)$

En este caso son funciones *<u>crecientes</u>* y su gráfica es como sigue:

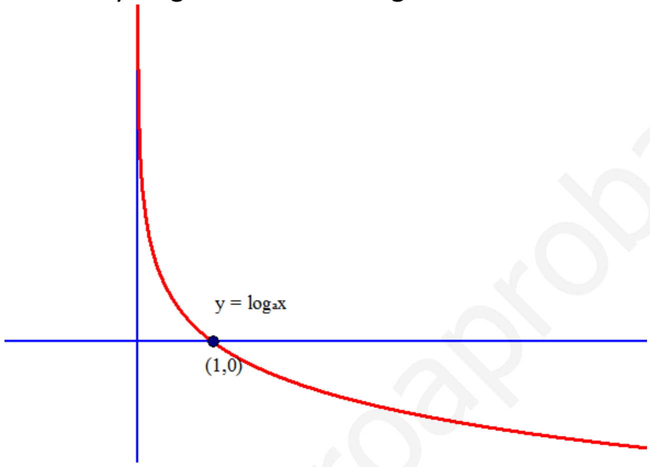


<u>Ejemplo</u>: Representamos gráficamente la función $y = \log_3 x$

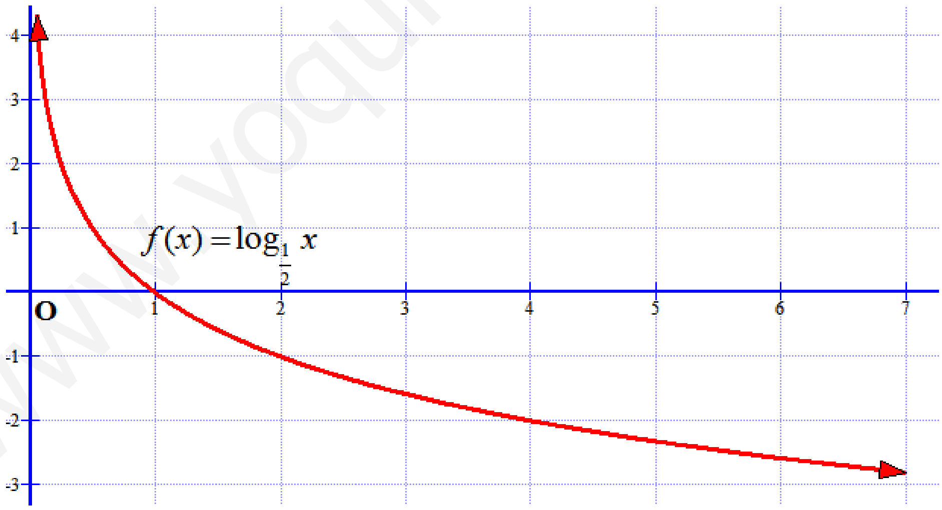


b) <u>La base</u> a <u>entre 0 y 1</u> $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



<u>Ejemplo</u>: Representamos gráficamente la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



10. <u>UNIDADES ANGULARES. TRIGONOMETRÍA</u>

La palabra trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metria* (medida). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Sirve para estudiar fenómenos vibratorios, como por ejemplo la luz, el sonido, la electricidad., etc.

<u>SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS</u>

a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el grado sexagesimal, que es la noventava parte del ángulo recto y se simboliza 1° . La sesentava parte de un grado es un minuto (1') y la sesentava parte de un minuto es un segundo (1'').

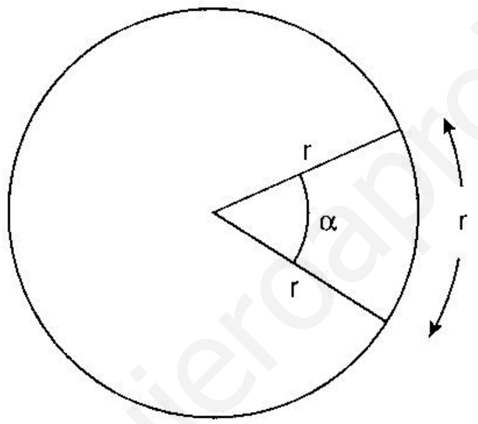
Por tanto, $\frac{\text{ángulo recto}}{90} = 1^{\circ}$ $\frac{1^{\circ}}{60} = 1'$ $\frac{1'}{60} = 1''$

Una circunferencia completa mide 360°
Un ángulo llano mide 180°

b) Sistema radial o circular: el radián

La unidad de medida es el *radián*, que se define como sigue:

Un ***radián*** *es la medida del ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados determinan sobre ella un arco de longitud igual al radio* r .



α = 1 radian

Para relacionar un sistema de medición con otro, observamos la siguiente tabla:

Ángulo	Sistema sexagesimal	Sistema circular
Completo	360º	2π radianes
Llano	180º	π radianes
Recto	90º	$\frac{\pi}{2}$ radianes

Con la tabla anterior podemos establecer simples reglas de tres para pasar de un sistema de medición a otro.
Ejemplo: Calcula los grados sexagesimales que tiene 1 radián

Haciendo uso de las proporciones y teniendo en cuenta la medida del ángulo llano, tenemos

$$\pi \longrightarrow 180^{\circ}$$
$$1 \longrightarrow x = \frac{1 \cdot 180^{\circ}}{\pi} \cong 57^{\circ}\ 17'\ 45''$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos 30° , 60° , 45° , 270°

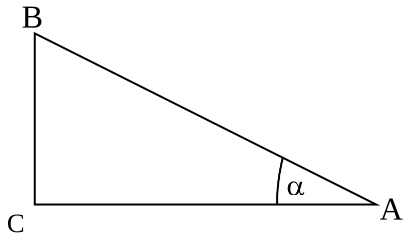
$30^o = \frac{180^o}{6} = \frac{\pi}{6} rad$	$60^o = \frac{180^o}{3} = \frac{\pi}{3} rad$
$45^o = \frac{180^o}{4} = \frac{\pi}{4} rad$	$270^o = 180^o + 90^o = (\pi + \frac{\pi}{2}) rad = \frac{3\pi}{2} rad$

NOTA: Las equivalencias que debemos saber u obtener rápidamente son:

$0^o = 0\, rad$	$30^o = \frac{\pi}{6} rad$	$45^o = \frac{\pi}{4} rad$	$60^o = \frac{\pi}{3} rad$	$90^o = \frac{\pi}{2} rad$	$180^o = \pi\, rad$
$120^o = \frac{2\pi}{3} rad$	$135^o = \frac{3\pi}{4} rad$	$150^o = \frac{5\pi}{6} rad$	$270^o = \frac{3\pi}{2} rad$	$360^o = 2\pi\, rad$	

11. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura:



Definimos las razones trigonométricas como sigue:

- *SENO*: El seno del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto opuesto de α y la longitud de la hipotenusa $sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AB}$
- *COSENO*: El coseno del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto contiguo de α y la longitud de la hipotenusa $\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{AC}{AB}$
- *TANGENTE*: La tangente del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto opuesto de α y la longitud del cateto contiguo $tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{BC}{AC}$

Propiedad: Se cumple que $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

Propiedad fundamental: Se cumple que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Uso de la calculadora

Nosotros para calcular las razones trigonométricas vamos a utilizar la calculadora normalmente. Por tanto hemos de practicar con la calculadora, y saber ponerla en el modo adecuado para que los ángulos sean considerados en el sistema de medida adecuado:

Modo DEG: En este caso las unidades de medida serán grados sexagesimales

Modo RAD: en este caso las unidades de medida son radianes

Poner un modo u otro depende del modelo de calculadora que poseamos.

Ejemplo: Calcular

$sen 12^o = 0.2079$ $\quad$ $tg\,98^o = -7.1154$ $\quad$ $\cos 7\pi = -1$

$\cos 234^o = -0.5878$ $\quad$ $\cos 687^o = 0.8387$ $\quad$ $tg\,\frac{4\pi}{5} = -0.7265$

$sen(-312^{o}) = 0.7431$ $\qquad sen\dfrac{5\pi}{2} = 1$ $\qquad sen5 = -0.9589$

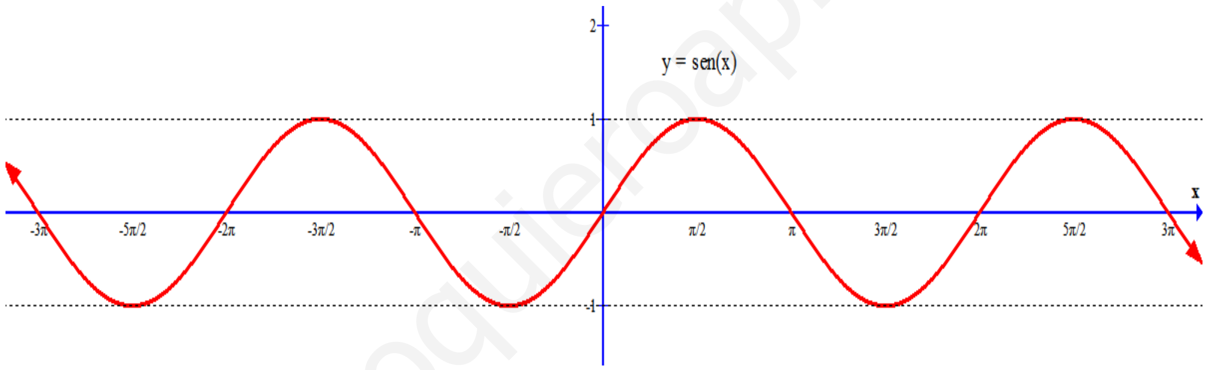
Tenemos la siguiente tabla de razones trigonométricas para los ángulos más usados del primer cuadrante. Es conveniente saberla.

Ángulo α	**0 = 0º**	$\frac{\pi}{6} = 30^{o}$	$\frac{\pi}{4} = 45^{o}$	$\frac{\pi}{3} = 60^{o}$	$\frac{\pi}{2} = 90^{o}$
***sen* α**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
***cos* α**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
***tg* α**	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

12. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

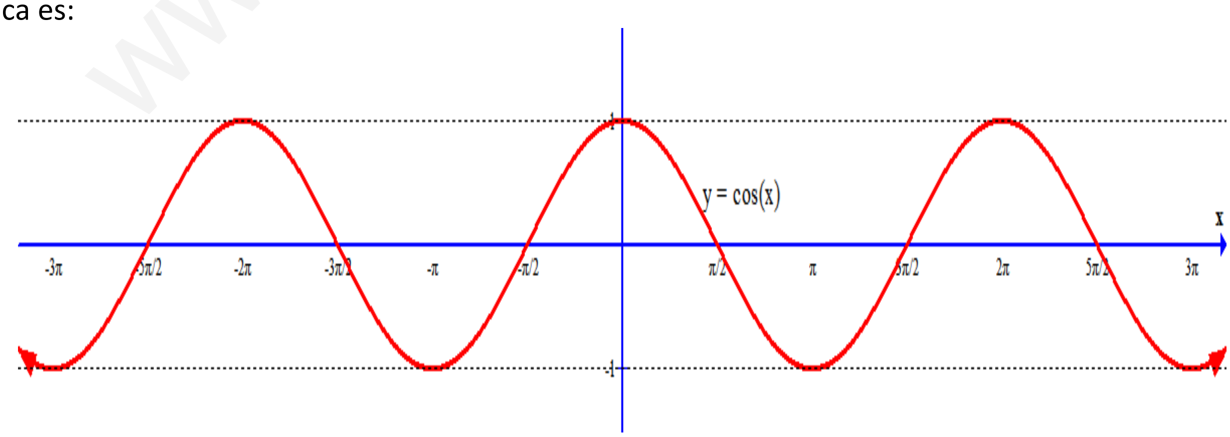
- *FUNCIÓN SENO*

Se trata de la función $f(x) = sen(x)$, cuyo dominio es todo R
Tiene simetría impar y es periódica de periodo 2π
Su imagen es: $\mathrm{Im}(sen) = [-1,1]$
Su gráfica es:



- *FUNCIÓN COSENO*

Se trata de la función $f(x) = \cos(x)$, cuyo dominio es todo R
Tiene simetría par y es periódica de periodo 2π
Su imagen es: $\mathrm{Im}(\cos) = [-1,1]$
Su gráfica es:



- *FUNCIÓN TANGENTE*

Se trata de la función $f(x) = tg(x)$, cuyo dominio es todo R salvo los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

Matemáticamente se escribe así: $Dom(tg) = R - \left\{ x \in R,, x = (2k+1)\frac{\pi}{2},, k \in Z \right\}$

Tiene simetría impar y es periódica de periodo π
Su imagen es todo R: $\mathrm{Im}(tg) = R$
Su gráfica es: