1. Primeras definiciones

- Una *matriz* es un conjunto de elementos (números) ordenado en filas y columnas. En general una matriz se nombra con una letra mayúscula y a sus elementos con letras minúsculas indicando en subíndices la fila y la columna que ocupan.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{i\,j}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

La matriz anterior tiene *m* filas y *n* columnas. Se suele decir que es de *orden* o *dimensión* $m\times n$. Los elementos a_{ij} son números reales: $a_{ij}\in\mathbb{R}$. El primer subíndice, *i*, indica la fila y el segundo, *j*, indica la columna que ocupa el término a_{ij}.

- Dos matrices son *iguales* cuando son del mismo orden y coinciden término a término. O sea, si $A=\left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{i\,j}\right)_{m\times n}$, entonces $A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i=1,\ldots,m$ y $\forall j=1,\ldots,n$.

- Dada una matriz $A=\left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$, se llama *traspuesta* de *A*, a otra matriz que denotaremos por A^t y que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas. Es decir $A=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$. Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$. Observa que, sea quién sea la matriz *A*, siempre se cumple que $\left(A^t\right)^t=A$.

- Una matriz es *cuadrada* si tiene tantas filas como columnas. En este caso, en vez de decir que es de orden $n\times n$, diremos que es de orden *n*. Dada una matriz cuadrada *A* de orden *n*, se llama *diagonal principal* de la matriz *A* a los elementos $a_{11},\,a_{22},\,a_{33},\ldots,a_{nn}$

- Una matriz cuadrada *A* es *simétrica* si coincide con su traspuesta, es decir, si $A=A^t$. Por ejemplo, la matriz $C=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -7 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ es simétrica pues $C=C^t$. En este caso, además, los elementos de la diagonal principal son 1, 4, −2.

- Una matriz cuadrada recibe el nombre de *matriz triangular* si los elementos situados por encima o por debajo de los que ocupan la diagonal principal son nulos. Por ejemplo, son matrices triangulares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada se dice que es *diagonal* si los únicos elementos no nulos que puede tener son los de la diagonal principal. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, es diagonal.

2. Operaciones con matrices

Hay tres operaciones básicas con matrices: producto de un número real por una matriz, suma de matrices y producto de matrices. Veremos con detenimiento cada una de ellas, pues no es posible sumar o multiplicar dos matrices cualesquiera.

2.1. Producto de un número por una matriz

Para multiplicar un número real k por una matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, se multiplica el número k por todos y cada uno de los términos de la matriz A: $kA=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$. Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 8 & -7 & -3\\ 4 & 5 & -9\end{pmatrix}\Rightarrow -3A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -6\\ -24 & 21 & 9\\ -12 & -15 & 27\end{pmatrix}$

2.2. Suma de matrices

Para que dos matrices A y B puedan sumarse, es necesario que sean del mismo orden. En este caso, la suma se efectúa término a término: dadas $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}\Rightarrow A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$. Por ejemplo, las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\ -2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & 8 & -5\end{pmatrix}$, se pueden sumar porque son del mismo orden y se tiene que $A+B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\ -2 & 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & 8 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -8\\ -1 & 12 & 1\end{pmatrix}$

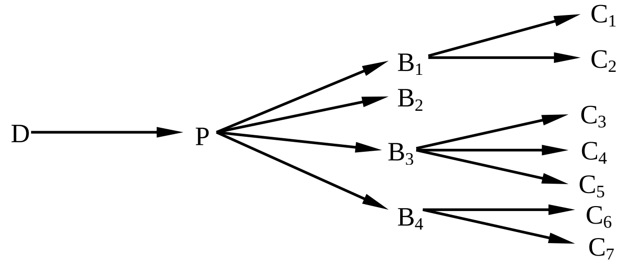
2.3. Producto de una matriz fila por una matriz columna

Ni que decir tiene que una matriz fila es la formada por una sola fila y una matriz columna es la formada por una sola columna. Una matriz fila se puede multiplicar por una matriz columna si ambas tienen el mismo número de términos. Es decir si $A=\left(a_{1j}\right)_{1\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\end{pmatrix}$ y $B=\left(b_{i1}\right)_{n\times 1}=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \ldots\\ b_{n1}\end{pmatrix}$, entonces el producto es $AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \ldots\\ b_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots\ldots+a_{1n}b_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_{i1}$. Observa que el resultado de multiplicar una matriz fila por una matriz columna es un número real. Por ejemplo: si $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ -5\\ 7\end{pmatrix}$, entonces: $AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ -5\\ 7\end{pmatrix}=1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-5)+5\cdot 7=-4+4-15+35=20$.

- ***Grafos y grafos orientados***

El mapa de las vías férreas de un país o el plano callejero de una ciudad representan una red de líneas. Cada segmento rectilíneo une dos puntos, denominados *vértices*. Pues bien, a la red de vértices y líneas que los unen se les llama *grafo*.

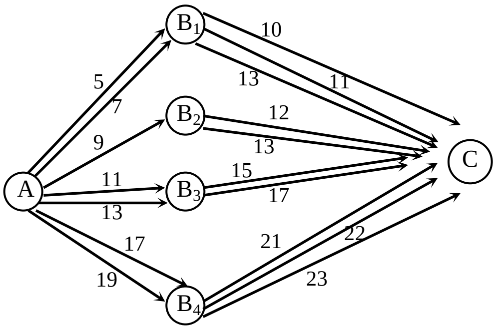
El plano de las cañerías de una ciudad también es un grafo, pero éste tiene una diferencia esencial con el plano callejero: el agua va en un único sentido por la tubería. Si en las líneas del grafo señalamos con un flecha el sentido del movimiento del agua, tendremos un *grafo orientado*.



Por ejemplo, el plano de la derecha puede representar una distribución teórica de agua muy simple (grafo orientado). Piensa que de la depuradora D, el agua va al pueblo P, y luego se distribuye a los distintos barrios y calles.

- ***Un ejemplo sencillo de la representación de grafos mediante matrices fila y columna, y la interpretación del producto***

Pensemos que para viajar de una ciudad A a otra ciudad C no hay vuelo directo, sino que es necesario hacer escala en alguno de los aeropuertos intermedios. Supongamos que el grafo orientado es el siguiente:



Los números que hay al lado de cada flecha indican las horas de salida de cada vuelo. Obsérvese que, por ejemplo, el viaje desde A hacia C, haciendo escala en B_1, se puede hacer de 6 formas distintas.

El número de vuelos de A a B_1, B_2, B_3 y B_4, se puede representar mediante la matriz fila $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y el número de vuelos de B_1, B_2, B_3 y B_4 a C, se puede representar mediante la matriz columna $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matriz producto da el número total de combinaciones para ir de A a C pasando por alguno de los aeropuertos intermedios: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6+2+4+6=18$. Es decir, hay 18 formas distintas de ir de A a C.

2.4. Producto de matrices

Para que dos matrices puedan multiplicarse es necesario que *el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda*. Concretamente, dadas $A=\left(a_{ik}\right)_{m\times p}$ y $B=\left(b_{kj}\right)_{p\times n}$ (observa que el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda), se define el *producto* de *A* por *B*, de la siguiente forma: $A\cdot B = C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, donde c_{ij} es el producto de la fila *i* por la columna *j*, tal y como se vio en el apartado 2.3: $c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ..... & a_{ip} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+.....+a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. La matriz producto *C* tiene tantas filas como la matriz *A* (*m*) y tantas columnas como la matriz *B* (*n*).

Un ejemplo ilustra muy bien la definición de producto de matrices:

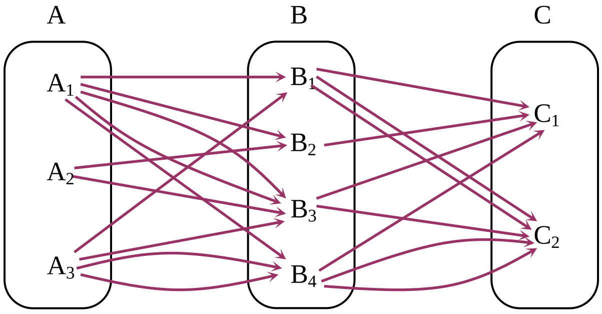
Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. El producto $A\cdot B$ puede realizarse porque la matriz *A* tiene tantas columnas como filas tiene la matriz *B* (3). Entonces: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 1 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 2+3\cdot 6 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ 5\cdot(-2)+0\cdot 3+(-4)\cdot 0 & 5\cdot(-3)+0\cdot(-4)+(-4)\cdot 1 & 5\cdot 0+0\cdot 2+(-4)\cdot 6 & 5\cdot 1+0\cdot(-1)+(-4)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 16 & 8 \\ -10 & -19 & -24 & -3 \end{pmatrix}$. Observa que la matriz producto es de orden 2×4.

- ***Un ejemplo sencillo de la representación de grafos mediante matrices y la interpretación del producto***

La provincia A limita con la B y la B con la C, pero A no limita con C. La provincia A tiene tres estaciones de ferrocarril (A_1, A_2 y A_3), la provincia B cuatro (B_1, B_2, B_3 y B_4) y la provincia C dos (C_1 y C_2), de tal manera que las conexiones por vía férrea vienen dadas por el siguiente grafo:



En las siguientes tablas se describen el número de trayectos posibles de la provincia A a la provincia B y de la provincia B a la C, dependiendo de la estación de salida y de la estación de llegada:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	1	2	1
A_2	0	1	1	0
A_3	1	0	1	2

	C_1	C_2
B_1	1	2
B_2	1	0
B_3	1	1
B_4	1	2

Estos datos se pueden expresar mediante dos matrices: la matriz de los trayectos de la provincia A a la provincia B y que llamaremos R; y la matriz de los trayectos de la provincia B a la C, que llamaremos S:

$$R=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\1&0&1&2\end{pmatrix};\ S=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

El producto de las matrices R y S proporciona el número de combinaciones para viajar desde las estaciones de la provincia A a las estaciones de la provincia C, pasando por alguna de las estaciones de la provincia B:

$$R\cdot S=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\1&0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\2&1\\4&5\end{pmatrix}$$

Las filas indican las estaciones de la provincia A (A_1, A_2 y A_3) y las columnas las estaciones de la provincia C (C_1 y C_2). Así, por ejemplo, el número 6 de la matriz indica que hay 6 combinaciones para ir desde la estación A_1 de la provincia A hasta la estación C_2 de la provincia C, pasando por alguna de las estaciones de la provincia B.

3. Propiedades de las operaciones con matrices

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ al conjunto formado por todas las matrices de orden $m\times n$. La estructura de este conjunto depende de las propiedades de las operaciones con matrices.

3.1. Propiedades del producto de números por matrices

Si $a,\, b\in\mathbb{R}$ y $A,\, B\in\mathcal{M}_{m\times n}$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. **Asociativa:** $a(bA)=(ab)A$
2. **Distributiva I:** $(a+b)A=aA+bA$
3. **Distributiva II:** $a(A+B)=aA+aB$
4. **Producto por el número 1:** $1A=A$

3.2. Propiedades de la suma de matrices

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. **Conmutativa:** $A+B = B+A$
3. **Elemento neutro:** la matriz $O_{m\times n}$, cuyos elementos son todos 0, sumada con cualquier otra matriz de orden $m\times n$, la deja igual, es decir: $A+O=O+A=A$
4. **Elemento opuesto:** la opuesta de la matriz A es otra matriz del mismo orden, $-A$, cuyos elementos son los opuestos de los elementos de la matriz A, es decir, si $A=(a_{ij})$ entonces $-A=(-a_{ij})$. En este caso se cumple $A+(-A)=A-A=O\ ;\ -A+A=O$, ya que $(a_{ij})+(-a_{ij})=(a_{ij}-a_{ij})=(0)=O$

3.3. Propiedades del producto de matrices

1. **Asociativa:** $(A_{m\times n}\cdot B_{n\times p})\cdot C_{p\times q} = A_{m\times n}\cdot (B_{n\times p}\cdot C_{p\times q})$
2. El producto de matrices **no es conmutativo**, es decir, en general el producto $A\cdot B$ no es igual al producto $B\cdot A$ (siempre que ambos productos puedan hacerse): $A\cdot B \neq B\cdot A$.

3.4. Propiedades distributivas

Si A, B, C, D son matrices cuyas dimensiones permiten efectuar las operaciones que se indican, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A\cdot(B+C)=A\cdot B + A\cdot C$
2. $(B+C)\cdot D = B\cdot D + C\cdot D$

4. Matrices cuadradas

Designaremos por $\mathcal{M}_n$ al conjunto de las matrices cuadradas de orden n. Además de poder sumarse y multiplicarse por números, pueden claramente multiplicarse entre sí (si multiplicamos dos matrices de orden n el resultado es otra matriz de orden n). Estas operaciones cumplen todas las propiedades estudiadas hasta ahora. Pero el conjunto $\mathcal{M}_n$ tiene algunas otras peculiaridades.

4.1. Matriz identidad o matriz unidad

La *matriz identidad* o *matriz unidad* (a partir de aquí sólo diremos matriz identidad) es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos "unos". Se denota por I. Por tanto la matriz identidad de orden n será $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$.

Propiedad: dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se cumple que $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$. En general se escribe $A\cdot I = I\cdot A = A$, suponiendo que A e I son matrices cuadradas del mismo orden. Es esta razón por la que a I se le llama matriz identidad o unidad. Es el elemento neutro para el producto de matrices, como el 1 en el producto de números.

4.2. Matriz inversa

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, se llama *matriz inversa* de A, a otra matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, cumpliendo que $A\cdot A^{-1}=I$; $A^{-1}\cdot A = I$. Observa que si la matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces al multiplicarlas sí se cumple la propiedad conmutativa y el resultado es la matriz identidad.

Es conveniente decir aquí que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Hay unas que sí y otras que no. Por ejemplo, la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pues $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$ (¡comprueba esto último!).

4.3. Cálculo de la inversa de una matriz por el método de Gauss

Para hallar la inversa, A^{-1}, de una matriz *A*, impondremos a la matriz identidad *I* los mismos cambios a los que hay que someter a la matriz *A* para obtener la matriz identidad.
En la práctica, se coloca la matriz *A*, y a su derecha, la matriz *I*. Se realizan las transformaciones necesarias para que *A* se transforme en *I*. Como consecuencia, la matriz que se obtiene a la derecha de *I* es A^{-1}. Todas las transformaciones que se realicen serán idénticas a las que utilizamos para resolver un sistema de ecuaciones por el método de Gauss. Si, al final del proceso, en la parte de la izquierda aparece una fila de ceros, entonces la matriz *A* no tiene inversa.

Calculemos por este método, por ejemplo, la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&1\\2&0&0\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1}\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&-2&-6&-2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3+2f_2}\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&-10&-4&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[10f_1+3f_3]{-5f_2+f_3}$$

$$\begin{pmatrix}10&10&0&-2&6&3\\0&-5&0&1&-3&1\\0&0&-10&-4&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1+2f_2}\begin{pmatrix}10&0&0&0&0&5\\0&-5&0&1&-3&1\\0&0&-10&-4&2&1\end{pmatrix}$$

. Finalmente dividimos la primera fila entre 10, la segunda entre -5 y la tercera entre -10, obteniendo: $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{10}\end{pmatrix}$. Por tanto la inversa de *A* es: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{10}\end{pmatrix}$

5. Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Todo sistema de ecuaciones lleva asociado tres matrices: la de los coeficientes, la de las incógnitas y la de los términos independientes. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases}2x-3y+z=1\\x+y-2z=-2\\-3x-y+3z=2\end{cases}$ lleva asociada la matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&-2\\-3&-1&3\end{pmatrix}$, la de las incógnitas $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y la de los términos independientes $C=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Por tanto el sistema se puede expresar matricialmente de la forma: $\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&-2\\-3&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$, es decir, $A\cdot X=C$. Si la matriz *A* tuviera inversa, A^{-1}, podríamos despeja *X* del siguiente modo: multiplicamos <u>por la izquierda</u> los dos miembros de la igualdad $A\cdot X=C$, es decir, $A^{-1}\cdot\left(A\cdot X\right)=A^{-1}\cdot C$. Aplicando la propiedad asociativa: $\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot C$. Entonces $I\cdot X=A^{-1}\cdot C$, con lo que se obtiene $X=A^{-1}\cdot C$ (obtén ahora tú las soluciones del sistema calculando la matriz A^{-1} y haciendo $A^{-1}\cdot C$ para así obtener la matriz *X*; son $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$).

6. Determinante de una matriz cuadrada

Toda matriz cuadrada A lleva asociado un número, llamado *determinante* de A, y que denotaremos mediante el símbolo $|A|$. Este número, entre otras cosas, permite saber cuándo una matriz cuadrada tiene inversa y, caso de que ésta exista, también se utiliza para su cálculo utilizando otro método alternativo al método de Gauss. Nosotros nos vamos a ceñir al cálculo de determinantes de matrices cuadradas de orden 2 y de orden 3.

6.1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Dada una matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de la matriz A, viene dado por:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ es:

$$|A|=\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}=(-3)\cdot(-5)-(-4)\cdot 7=15-(-28)=15+28=43$$

6.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Dada una matriz cuadrada de orden 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el determinante de A viene dado por la fórmula:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\left(a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{13}a_{32}\right)-\left(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{23}a_{11}a_{32}\right)$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\left(1\cdot 4\cdot 2+(-2)\cdot 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 5\cdot 1\right)-\left(5\cdot 4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1\right)=$$

$$=(8+2-15)-(-20+12+1)=-5-(-7)=-5+7=2$$

Como esta fórmula es bastante engorrosa y complicada de aprender, propondremos una regla mnemotécnica para su uso. Se recurre a la estrategia siguiente. Copiamos la matriz y debajo la primera y segunda filas. Los términos positivos corresponden a la diagonal principal y a las otras dos que van por debajo. Los términos negativos son los que corresponden a la diagonal secundaria y a las otras dos que van por debajo.

Términos positivos	Términos negativos
$\begin{matrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{matrix}$
$8-15+2=-5$	$-20+1+12=-7$

Ahora se resta el resultado de sumar los términos positivos del resultado de sumar los términos negativos. Por tanto $|A|=-5-(-7)=-5+7=2$. Esta regla se conoce con el nombre de *regla de Sarrus*.

7. Matriz adjunta de una matriz cuadrada

Para el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada utilizando determinantes necesitamos introducir los conceptos de *adjunto* de un elemento de una matriz cuadrada, y de *matriz adjunta* de una matriz cuadrada.

7.1. Menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada *A*, el *menor complementario* del elemento a_{ij} de la matriz *A*, es el determinante de la matriz cuadrada de orden 2 que se obtiene al suprimir la fila *i* y la columna *j* en la matriz *A*. Se representa por Δ_{ij}. Se llama *adjunto* A_{ij} del elemento a_{ij}, al número dado por la fórmula $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$.

Por ejemplo, dada la matriz de ejemplo anterior, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, el menor complementario del elemento $a_{21} = -3$, es el determinante de la matriz cuadrada de orden 2 que resulta de suprimir la fila 2 y la columna 1:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -4 - 5 = -9$$

El adjunto del mismo elemento $a_{21} = -3$ es, por tanto, $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{21} = (-1)^3 \cdot (-9) = (-1) \cdot (-9) = 9$.

Calculemos como ejemplo los ocho adjuntos restantes de la matriz *A*:

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (8-1) = 1 \cdot 7 = 7$
- $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6-(-1)) = -1 \cdot (-5) = 5$
- $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3-(-4)) = 1 \cdot 1 = 1$
- $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-(-5)) = 1 \cdot 7 = 7$
- $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \Delta_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-2) = -1 \cdot (-1) = 1$
- $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \Delta_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2-20) = 1 \cdot (-22) = -22$
- $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \Delta_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-(-15)) = -1 \cdot 16 = -16$
- $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \Delta_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4-6) = 1 \cdot (-2) = -2$

7.2. Matriz adjunta de una matriz cuadrada

La matriz adjunta de una matriz cuadrada *A*, que denotaremos por A^d, es la formada por los adjuntos de la matriz *A*: $A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$. La matriz adjunta del ejemplo anterior es $A^d = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ -22 & -16 & -2 \end{pmatrix}$

8. Matriz inversa de una matriz cuadrada utilizando determinantes

Un resultado muy importante sobre matrices cuadradas y determinantes es el siguiente

Teorema

Una matriz cuadrada *A* tiene inversa si, y solamente si, su determinante es distinto de cero. Simbólicamente:

$$A \in \mathcal{M}_n\,,\ \exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

8.1. Cálculo de la matriz inversa utilizando determinantes

Supongamos que una matriz cuadrada *A* tiene inversa. Es decir, según el teorema anterior, $|A| \neq 0$. Entonces la matriz inversa de *A*, A^{-1}, viene dada por la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^d\right)^t$$

La matriz $\left(A^d\right)^t$ es la traspuesta de la adjunta de *A* (recuerda que la traspuesta de una matriz es otra matriz que se obtiene intercambiando las filas por las columnas).

Calculemos como ejemplo la matriz inversa de la matriz que hemos venido utilizando para los ejemplos anteriores, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^d\right)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ -22 & -16 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & -22 \\ 5 & 7 & -16 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & -11 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

En el caso de matrices cuadradas de orden 2 la fórmula anterior es muy sencilla de recordar.

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces claramente la matriz adjunta es $A^d = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, y la traspuesta de esta última es $\left(A^d\right)^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Lo que se hace es intercambiar los elementos de la diagonal principal y cambiar de signo los otros dos. Luego, cada uno de ellos se divide por el determinante de la matriz *A*.

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, su determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11$.

Por tanto, la inversa de *A* será la matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

9. Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación donde tanto la incógnita como los coeficientes son matrices.

Pongamos un ejemplo.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -3 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ (esta es la hemos venido utilizando anteriormente), $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ -5 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Nos planteamos resolver, por ejemplo, la siguiente ecuación:

$$AX-C=B$$

Es decir, debemos despejar la matriz X de la ecuación anterior. Para ello se procede como si fuera una ecuación normal de primer grado, es decir, dejamos los términos con incógnita a la izquierda de la igualdad y los que no tienen incógnita a la derecha. Para ello sumamos la matriz C en los dos miembros de la igualdad (o lo que es lo mismo, "pasamos" sumando la matriz C del primer miembro al segundo).

$$AX-C+C=B+C \Rightarrow AX=B+C$$

Ahora queda despejar la matriz incógnita X. Si fuera una ecuación normal donde los coeficientes son números, entonces procederíamos así: $X=\dfrac{B+C}{A}$. Pero los coeficientes no son números sino matrices y esto no lo podemos hacer porque ¡no sabemos dividir matrices! Pero sí que sabemos que al multiplicar una matriz por su inversa se obtiene como resultado la matriz identidad I, matriz que al multiplicarla por cualquier otra la deja como está (recuerda que la matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices). Entonces lo que haremos es multiplicar los dos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz que multiplica a la incógnita (A^{-1} en este caso) y **siempre por el lado donde se encuentra dicha matriz** (en este caso por la izquierda).

$$A^{-1}AX=A^{-1}(B+C) \Rightarrow IX=A^{-1}(B+C) \Rightarrow X=A^{-1}(B+C)$$

Así, ya hemos despejado la incógnita X. Ahora sólo falta calcular su valor.

$$X=A^{-1}\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -3 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ -5 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{9}{2} & -11\\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -8\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -7 & 2 & -3\\ 5 & -7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-83 & 100 & -94\\ -62 & 73 & -69\\ -8 & 10 & -9\end{pmatrix}$$

Muy importante

Para despejar la incógnita hemos de multiplicar ambos miembros por la inversa de la matriz que va multiplicando a la incógnita, pero ***siempre por el lado donde se encuentra dicha matriz***.

Si no lo hacemos así **no podríamos despejar la incógnita** pues las matrices no cumplen en general la propiedad conmutativa. Por ejemplo, en el caso anterior si multiplicamos por A^{-1} a la derecha de ambos miembros tendríamos $AXA^{-1}=(B+C)A^{-1}$, y la incógnita X no quedaría despejada ya que al no cumplirse la propiedad conmutativa, entonces AXA^{-1} **no sería igual** que $AA^{-1}X=IX=X$.

Este error es muy común en la práctica, así como multiplicar un miembro por la izquierda y el otro por la derecha. **Cuando se multiplican por la inversa los dos miembros de la igualdad se hace en ambos por el mismo lado: o en los dos por la izquierda o en los dos por la derecha**.