Probabilidad

SUCESOS ALEATORIOS
PROBABILIDAD

Matemáticas 2º de Bachillerato Ciencias Sociales

TEMA 1.- SUCESOS ALEATORIOS

1.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una *experiencia determinista*. Si echamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una *experiencia aleatoria*.

Un ***experimento aleatorio*** es aquel que, aún pudiéndose repetir indefinidamente en análogas condiciones, es imposible predecir el resultado.

Ejemplos:

- La extracción de una carta de una baraja
- El lanzamiento de un dado
- La extracción de una bola del bombo de la lotería
- El lanzamiento de una moneda

Se llama ***espacio muestral*** de un experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento. Le llamaremos **E**.

Ejemplos:

- En un dado, E = {1,2,3,4,5,6}
- En una moneda, E = {C,X}
- En dos monedas, E = {CC,CX,XC,XX}

A cada uno de los elementos del espacio muestral se le llama *punto muestral*.
Así, en lanzamiento de un dado, los puntos maestrales son: salir un 1, salir un 2, salir un 3,…

Un s***uceso aleatorio*** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Puede estar formado por uno o varios puntos muestrales.
Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

A los sucesos que sólo contienen un punto muestral se les llama ***sucesos elementales***. Si contienen más de un punto muestral se llaman ***sucesos compuestos***.
Así, el suceso A = "sacar un 2 en el lanzamiento de un dado" = {2} es un suceso elemental.
El suceso B = "sacar un nº mayor que 3" = {4,5,6} está compuesto por tres puntos muestrales.

También son sucesos el ***suceso vacío*** o ***suceso imposible*** , Ø, y el propio E, ***suceso seguro***.

Al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio lo llamaremos ***espacio de sucesos,*** **S**.

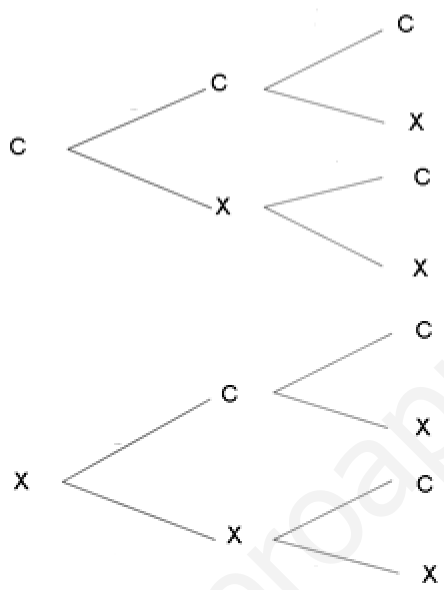
Si E tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es 2^n.

En una moneda hay $2^2 = 4$ sucesos: S={Ø,{C},{X},{C,X}}

Nota: tanto el Ø como E siempre están en el espacio de sucesos.

A veces, para calcular el espacio muestral de un experimento aleatorio, es útil utilizar el llamado ***diagrama de árbol***.

Ejemplo: Calcular el espacio muestral del experimento aleatorio "lanzar tres monedas"



Usando el diagrama, el espacio muestral será:

E = {CCC,CCX,CXC,CXX,XCC,XCX,XXC,XXX}

Ejercicios:

1.- Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

a. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
b. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
c. Anotar el sexo de los hijos en familias con cuatro hijos
d. El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.

2.- Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.
2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.
3. El suceso A = {extraer al menos una bola blanca}.
4. El suceso A = {extraer una sola bola negra}.

3.- ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Cuántos empiezan por 3? ¿Cuántos son mayores que 400?

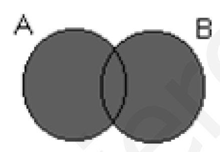
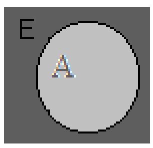
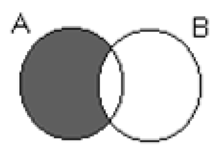
4.- Una urna contiene 1 bola verde, una bola azul y una bola roja. Obtener el espacio muestral del experimento que consiste en sacar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas de la urna. ¿Cuál es el espacio muestral si se extraen con reemplazamiento?

5.- ¿Cuántas parejas se pueden formar con las 5 vocales si no se pueden repetir? ¿Y si si?

6.- Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Sea A el suceso "*el hijo mayor es una hembra*", y B el suceso "*los dos hijos pequeños son varones*". ¿Cuáles son los elementos de A y B?

2.- OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos, A y B, se llaman:

Unión		$A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de *A* y todos los elementos de *B*.
Intersección		$A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de *A* y de *B*.
Suceso Contrario o Complementario		El suceso $\overline{A}=E - A$ se llama suceso contrario de *A*.
Diferencia		$A - B$ es el suceso formado por todos los elementos de *A* que no son de *B*. $A-B=A\cap\overline{B}$

Dos sucesos A y B, se llaman ***incompatibles*** cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \varnothing$ (también se dice que A y B son ***disjuntos***). En caso contrario diremos que son ***compatibles***.

Ejemplo:

En el experimento E = "lanzar un dado al aire", consideramos los sucesos:

A = "sacar un número par". B = {1,2,3,5} = "obtener un 1, 2, 3 ó 5".

C = {4,6} = "obtener un 4 ó un 6". D = {2,6} = "obtener un 2 ó un 6".

F = {1,3} = "obtener un 1 ó un 3". G = "obtener un múltiplo de 3".

- A y D son sucesos iguales al estar formados por los mismos sucesos elementales.
- C está contenido en A. Luego $C \cap A = C$, puesto que siempre que ocurre el suceso C (sacar 4 ó 6) ocurre el suceso A, puesto que se obtiene un número par.
- B y C son incompatibles, ya que $B \cap C = \varnothing$ y complementarios, al cumplirse $B \cup C = E$.
- $A \cup B$ = "sacar un número par" $\cup$ {1,2,3,5} = {1,2,3,4,5,6} = E.
- $A \cap G$ = {2,4,6} $\cap$ {3,6} = {6}, es decir, el suceso intersección de los sucesos "sacar un número par" y "obtener un múltiplo de tres" es "sacar un 6".
- B-D = $B \cap \overline{D}$ = {1,2,3,5} $\cap$ {1,3,4,5} = {1,3,5} = "obtener un número impar" = $\overline{A}$.
- C y F son incompatibles puesto que $C \cap F = \varnothing$.

Las operaciones unión, intersección y complementación (contrario) verifican las **propiedades:**

	Unión	**Intersección**
1.Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2.Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3.Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4.Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
5.Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6.Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
7.Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
8.	$A \cup \overline{A} = E$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$

A las familias de conjuntos que verifican las propiedades anteriores se les denomina ***álgebras de Boole***.

En el álgebra de Boole anterior se verifican además las siguientes propiedades, conocidas como ***leyes de De Morgan***:

- El suceso contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de sus sucesos contrarios:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- El suceso contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus sucesos contrarios:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

EJERCICIOS

1.- Se sacan sucesivamente dos bolas de una urna que contiene una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:
   a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda
   b) La primera bola no se devuelve

2.- Una urna contiene bolas numeradas con los dígitos 1, 3, 5 y 7. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento 3 bolas de la urna y se anota el número obtenido. Utilizar un diagrama de árbol para calcular el número de resultados posibles del experimento. ¿Cuántos son mayores que 500? ¿Cuántos empiezan por 3? Si los ordenamos de menor a mayor, ¿cuál ocupa el décimo lugar?

3.- En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A = "sacar exactamente dos cruces"
B = "que en la primera tirada salga una cruz"

   a) Obtener el espacio muestral y los sucesos A y B
   b) Calcular y explicar el significado de los sucesos:

$$\overline{A}\ ,\ \overline{B}\ ,\ A\cup B\ ,\ A\cap B\ ,\ \overline{A}\cap\overline{B}\ ,\ A\cap\overline{B}$$

4.- Se considera el experimento consistente en lanzar tres monedas al aire y anotar el resultado de las caras superiores. Se pide:

a) Espacio muestral.
b) Número de elementos del espacio de sucesos.
c) Suceso "obtener al menos dos caras"
d) Suceso "obtener como mínimo dos cruces"
e) Suceso "obtener como máximo dos caras"
f) Suceso "obtener tres caras o tres cruces"

5.- Si los sucesos A, B y C representan:
A = "llueva hoy" B = "llueva mañana" C = "llueva pasado mañana"

   a) Expresa, mediante operaciones con sucesos, las siguientes situaciones:
      1.- Llueva al menos uno de los tres días
      2.- Llueva sólo hoy
      3.- No llueva ninguno de los tres días
      4.- Llueva hoy o mañana, pero pasado no
      5.- Llueva exactamente dos días

   b) Explica el significado de:

$$(A\cap B)\cap\overline{C}\ ,\ \left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\ ,\ A\cup B\cup\overline{C}\ ,\ \left(\overline{B\cap C}\right)\ ,\ \left(\overline{A\cap B\cap C}\right)$$

6.- Se considera el experimento que consiste en el lanzamiento de dos dados del mismo color y del mismo tamaño, es decir, indistinguibles y anotar el resultado de las caras superiores. Se pide:

a) Espacio muestral.
b) Suceso "obtener al menos un seis"
c) Suceso "obtener al menos un múltiplo de dos"
d) Suceso "Obtener a lo sumo un número impar"
e) Suceso “La suma de las caras es 7”

7.- Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: A = "salir un número primo" y B = "salir un número cuadrado perfecto". Responde a las cuestiones siguientes:

a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) Los sucesos *A* y *B*, ¿son compatibles o incompatibles?.
c) Encuentra los sucesos contrarios de *A* y *B*.

8.- De una baraja de 49 cartas extraemos una carta. Sean los sucesos: A = "sacar copas"; B = "sacar as" y C = "sacar as de oros". Determinar los sucesos siguientes:

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $B \cap C$
d) $A \cap \overline{B}$
e) $(A \cup B) \cap \overline{C}$
f) *B-C*

9.- Siendo A = {3,6,9,12} y B = {2,3,5,7,11}, comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan y las propiedades de simplificación.

10.- Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.
¿Cuál es el espacio muestral?
¿Son compatibles los sucesos A = “los dos escriben la misma vocal” y B = “Alfredo escribe una e”?

11.- Sean A, B y C tres sucesos cualesquiera del espacio de sucesos. Se pide expresar, en función de los sucesos anteriores y de sus contrarios, los siguientes sucesos:

a) Se realiza A y B.
b) Se realiza A y B, pero no C.
c) Se realiza al menos uno de los tres.
d) No se realiza ninguno de los tres.

TEMA 2.- PROBABILIDAD

1.- DEFINICIÓN

Laplace, eminente matemático francés de la última mitad del siglo XVIII y principios del XIX, describía la teoría de la probabilidad como “el sentido común reducido al cálculo”. Veamos como la siguiente anécdota justifica esta descripción:

> Dos estudiantes de Instituto intentan ponerse de acuerdo en como pasar una tarde. Acuerdan que tomarán su decisión lanzando una moneda. Si sale cara irán al cine, si sale cruz saldrán a tomar una coca-cola y si la moneda cae de canto, estudiarán.

La historia no es tan trivial como pueda parecer, con ella podemos aprender mucho. El sentido común, basando su juicio en la experiencia, nos indica que los estudiantes quieren saltarse la necesidad de estudiar. En otras palabras sabemos intuitivamente que la moneda no caerá de canto, que lo hará sobre la cara o sobre la cruz. Más aún, si la moneda es legal, tenemos la certeza moral de que las posibilidades de que salga cara o cruz son las mismas.

Pues bien la teoría de la probabilidad se basa en la asunción que hacemos de cuestiones tales como estas: ¿Cuál es la probabilidad de que una moneda caiga sobre el borde? ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara? ¿Cuál es la probabilidad de que salga cruz?

Para poder tratar estas cuestiones desde un punto de vista matemático, es necesario asignar valores numéricos a cada una de las probabilidades involucradas.

Supongamos por el momento que denotamos por ***p*** el valor numérico de la probabilidad de que al lanzar una moneda, salga cara. Puesto que es ***igualmente posible*** que al lanzar la moneda, salga cruz, la probabilidad de que salga cruz también debe tener asignado el valor ***p***.

Como tenemos la ***certeza*** de que saldrá cara o cruz sigue que ***2p*** debe ser el valor asignado al suceso seguro, el que ocurrirá siempre que lancemos una moneda al aire. Podemos elegir cualquier valor que nos plazca para el suceso seguro. Es costumbre elegir el valor 1. Esto es: asumimos que ***2p=1***. Entonces la probabilidad de que la moneda muestre cara es: ***1/2*** ; la probabilidad de que muestre cruz es: ***1/2***; y la probabilidad de que salga cara o cruz es:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Si analizamos detalladamente el ejemplo, podemos apreciar:

- Un experimento aleatorio, lanzar una moneda al aire

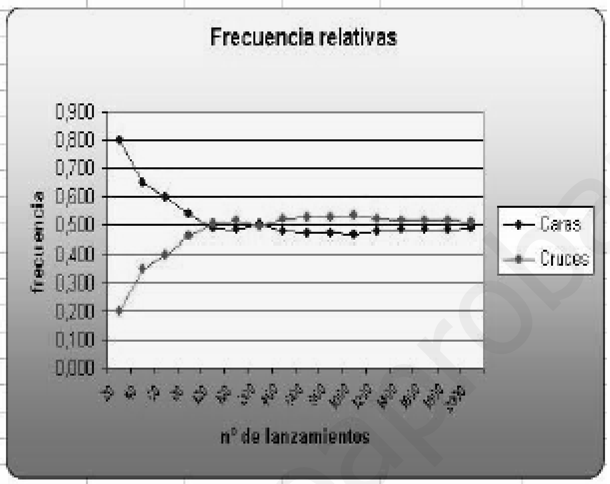
- Unos resultados puntuales, sale cara o sale cruz y no podemos tener la certeza de antemano de que sea cara o sea cruz.

- Unas asignaciones de probabilidad a cada uno de los resultados, que se basan en el sentido común y en nuestra experiencia previa.

Un experimento aleatorio se caracteriza porque repetido muchas veces y en idénticas condiciones el cociente entre el número de veces que aparece un resultado (suceso) y el número total de veces que se realiza el experimento tiende a un número fijo. Esta propiedad es conocida como ***ley de los grandes números***, establecida por *Jakob Bernouilli*. Por ejemplo, si lanzamos una moneda 20 veces, luego 40, luego 60,… así hasta 2000 veces y vamos anotando:

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS O LEY DE BERNOULLI

	Frecuencias relativas	
Lanzamientos	Caras	Cruces
20	0,800	0,200
40	0,650	0,350
60	0,600	0,400
80	0,538	0,463
120	0,492	0,508
160	0,481	0,519
200	0,505	0,495
400	0,478	0,523
600	0,473	0,527
800	0,470	0,530
1000	0,469	0,531
1200	0,478	0,523
1400	0,482	0,518
1600	0,484	0,516
1800	0,485	0,515
2000	0,491	0,509



Tiene el inconveniente de variar la sucesión de las frecuencias relativas de unas series de realizaciones a otras, si bien el valor al que se aproximan a medida que el número de realizaciones aumenta se mantiene estable.

La frecuencia relativa del suceso *A*:

$$f_r(A) = \frac{\text{número de veces que aparece } A}{\text{número de veces que se realiza el experimento}}$$

Propiedades de la frecuencia relativa:

1. $0 \leq f_r(A) \leq 1$ cualquiera que sea el suceso *A*.
2. $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
3. $f_r(E) = 1$ $f_r(\emptyset) = 0$.

Según esta idea, ***Probabilidad*** de un suceso es el número al que tiende la frecuencia relativa asociada al suceso a medida que el número de veces que se realiza el experimento crece.

Esta definición presenta el inconveniente de tener que realizar el experimento un gran número de veces y además siempre obtendremos un valor aproximado de la probabilidad.

Definición axiomática.

La definición axiomática (un axioma es una verdad evidente que no necesita demostración) de probabilidad se debe a *Kolmogorov*, quien consideró la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad cuando el número de veces que se realiza el experimento es muy grande:

Sea *E* el espacio muestral de cierto experimento aleatorio. La ***Probabilidad*** de cada suceso es un número que verifica:

1. Cualquiera que sea el suceso *A*, $P(A) \geq 0$.
2. Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3. La probabilidad total es 1. $P(E) = 1$.

Definición de Laplace.

En el caso de que todos los sucesos elementales del espacio muestral *E* sean equiprobables, *Laplace* define la probabilidad del suceso *A* como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso *A* en el experimento y el número de resultados posibles del experimento:

$$\text{Si} \quad E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \quad \text{y} \quad P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_k), \quad \text{entonces :}$$

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo:
Consideremos el experimento "lanzar un dado de quinielas (dos 1, dos X y dos 2) y anotar el resultado".

El espacio muestral es $E = \{1,X,2\}$.

Las probabilidades de cada uno de los sucesos son:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\{1\}) = 1/3 \qquad P(\{X\}) = 1/3 \qquad P(\{2\}) = 1/3$
- $P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 1/3 + 1/3 = 2/3 \qquad P(\{1,X\}) = 2/3$

  $P(\{2,X\}) = 2/3$
- $P(\{1,X,2\}) = P(E) = 1$

2.- PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Además de los axiomas, y como consecuencia de ellos, se verifican las siguientes propiedades:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

5. Si A y B son dos sucesos compatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A, B y C son sucesos compatibles dos a dos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

7.- Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, entonces:

$$P(A) = P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_K)$$

Ejemplos:

1.- De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. Calcular:

a) Probabilidad de salir un as
b) Probabilidad de salir un oro
c) Probabilidad de salir el as de oros
d) Probabilidad de salir un as o un oro

Solución:

a) $P(As) = \dfrac{n^o\, ases}{n^o\, total\ cartas} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10} = 0'1$

b) $P(Oros) = \dfrac{n^o\, oros}{n^o\, total\ cartas} = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4} = 0'25$

c) $P(As \cap Oros) = \dfrac{n^o\, ases\, de\, oros}{n^o\, total\, cartas} = \dfrac{1}{40} = 0'025$

d) $P\left(As \cup Oro\right) =$ al ser dos sucesos compatibles, aplicando la propiedad 5

$$= P(As) + P(Oro) - P(As \cap Oro) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

También podía haberse hecho este apartado contando cuántos ases y oros hay (sin repetir) y salen los 10 oros mas los 3 ases (el de oros no se cuenta otra vez), es decir, los 13 casos favorables.

2.- Se lanzan dos dados. Se pide:

a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

Solución:

El espacio muestral del experimento es:

E = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); ...; (6,6)}

y está formado por 36 sucesos elementales equiprobables. Constituyen el número de casos posibles del experimento.

Utilizando la regla de Laplace, calculamos las probabilidades de los sucesos que nos piden:

a) Si llamamos A al suceso "obtener una suma múltiplo de 3", los casos favorables al suceso A son:

A = {(1,2); (2,1); (1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1); (3,6); (4,5); (5,4); (6,3); (6,6)}.

Por tanto, $P(A)$ = 12/36 = 1/3

b) Si llamamos B al suceso "obtener unos valores que se diferencian en una cantidad mayor que dos", los casos favorables al suceso B son:

B = {(1,4); (4,1); (1,5); (5,1); (1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (2,6); (6,2); (3,6); (6,3)}.

Por tanto, $P(B)$ = 12/36 = 1/3

3.- Si escogemos al azar dos números de teléfono y observamos la última cifra de cada uno, determina las probabilidades siguientes:

a) Que las dos cifras sean iguales.
b) Que su suma sea 11.
c) Que su suma sea mayor que 7 y menor que 13.

Solución:

El espacio muestral de este experimento está formado por los cien sucesos elementales: 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ..., 98, 99. Para cada suceso del enunciado calculamos sus casos favorables, aplicamos la regla de Laplace y obtenemos:

a) Los casos favorables son: 00, 11, 22, ..., 99. La probabilidad de que las últimas cifras sean iguales es:

P(últimas cifras iguales) = 10/100 = 1/10 = 0.1

b) Los casos favorables a que la suma de las últimas cifras sea 11 son: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 y 92. Por tanto,

P(últimas cifras suman once) = 8/100 = 0.08

c) Deben contarse los números de dos cifras cuya suma sea 8, 9, 10, 11 y 12. Haciendo un recuento ordenado, se obtienen 43 casos favorables. La probabilidad buscada es:

P(últimas cifras suman un valor mayor que 7 y menor que 13) = 43/100 = 0.43

4.- Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$$p(A)=\frac{3}{8} \qquad p(B)=\frac{1}{2} \qquad p(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

Hallar:

$p(A\cup B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{A}\cap\overline{B})$, $p(\overline{A}\cup\overline{B})$, $p(A\cap\overline{B})$

$p(B\cap\overline{A})$

Solución:

- Como son compatibles:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

- $p(\bar{A})=1-p(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$
- $p(\bar{B})=1-p(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

- Por las leyes de De Morgan

$$p(\bar{A}\cap\bar{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

De la misma manera:

- $p(\bar{A}\cup\bar{B})=p(\overline{A\cap B})=1-p(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

- Por propiedades de sucesos:

$$p(A\cap\bar{B})=p(A)-p(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

- $p(B\cap\bar{A})=p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Ejercicios:

1.- Se lanzan 3 monedas. Calcular:

a) El espacio muestral
b) La probabilidad de que salgan al menos 2 cruces

2.- Se lanzan dos dados y se observa la suma de sus caras superiores. Calcular:

a) El espacio muestral
b) La probabilidad de que la suma sea 3, 4 ó 5
c) La probabilidad de que la suma sea 7

3.- La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0'6, de que apruebe historia es 0'5 y de que apruebe ambas es 0'2.

a) ¿Son compatibles los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar historia"?
b) Calcular la probabilidad de que un alumno elegido al azar apruebe al menos una de las dos asignaturas
c) Calcular la probabilidad de que un alumno elegido al azar no apruebe ninguna de las dos

4.- Una urna contiene 8 bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Se extrae una bola al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) Sea roja
b) Sea amarilla
c) Sea verde o amarilla
d) No sea roja

5.- Se lanzan dos dados. Sea A = "la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los dos dados es 2" y B = "obtener, al menos, un 6". Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$

6.- De dos sucesos A y B se sabe que la probabilidad de que ocurra A es $3/8$, la de que ocurra B es $1/2$, y la de que ocurran ambos a la vez es $1/4$. Calcular:

$a)\ P(A \cup B)$ $b)\ P(\overline{A})$ $c)\ P(\overline{B})$ $d)\ P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $e)\ P(\overline{A} \cup \overline{B})$
$f)\ P(A \cap \overline{B})$ $g)\ P(\overline{B} \cap A)$

7.- Se saca al azar una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que sea:

a) Un rey
b) Una copa
c) Una figura
d) Una copa o una figura
e) Una copa y una figura

8.- Una bolsa contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se saca una bola, se introduce nuevamente y se saca otra bola, obteniendo así un número de dos cifras. Sean los sucesos: A = "obtener un número que empiece por 3" y B = "obtener un número que sea múltiplo de 11". Calcular:

a) Las probabilidades de A y de B
b) $P(A \cap B)$
c) ¿Son A y B compatibles?

9.- En una clase hay 15 chicos y 12 chicas. De las chicas, 3 usan gafas y de los chicos, 4 usan gafas. Elegida una persona al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Sea chica
b) Use gafas
c) Sea chica y use gafas
d) Sea chico y no use gafas

10.- Sabiendo que $P(A) = 0'4$, $P(\overline{A} \cap B) = 0'4$, $P(A \cap B) = 0'1$, calcular $P(B)$ y $P(A \cup B)$

11.- En una ciudad el 60 % de los niños son alérgicos al polen, el 50 % a los ácaros y el 20 % son alérgicos a ambas cosas.

a) Calcular la probabilidad de que, elegido un niño al azar, sea alérgico al polen, a los ácaros o a ambas cosas
b) En un colegio con 450 niños, ¿cuántos cabe esperar que sean alérgicos al polen o a los ácaros?

12.- Con las cifras 1, 2, 3 y 4 se forman todos los números posibles de cuatro cifras distintas. Calcula:

a) La probabilidad de que termine en 1
b) La probabilidad de que sea un número par

13.- Antonio y Beatriz son los finalistas de un torneo de ajedrez. Gana el torneo quien gane dos partidas seguidas o tres alternativas (suponiendo que no hay tablas). Utiliza un diagrama de árbol para calcular el espacio muestral. Si ambos tienen las mismas opciones de ganar, ¿Qué probabilidad hay de que el torneo termine a la 3ª partida?

3.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

En un concurso de televisión, se dispone de 20 coches, para premiar al concursante, de las marcas y colores que se indican en la siguiente tabla:

	Rojo	**Azul**	**Totales**
SEAT Panda	2	8	**10**
SEAT Toledo	7	3	**10**
Totales	**9**	**11**	**20**

Los coches están colocados aleatoriamente, tras 20 puertas, de forma que el concursante no ve el coche que hay detrás de cada puerta. El concursante elige un número, entre 1 y 20, y si acierta la marca y el color del coche que hay en la puerta elegida, gana, en caso contrario pierde.

El concurso lo podemos considerar como un experimento aleatorio. Cada resultado es el coche elegido.

Para describir fácilmente todo el proceso vamos a considerar:

Suceso $\boldsymbol{P}$: El coche es un Seat Panda
Suceso $\boldsymbol{T}$: El coche es un Seat Toledo
Suceso $\boldsymbol{R}$: El coche es de color rojo
Suceso $\boldsymbol{A}$: El coche es de color azul

Así el suceso: "Seat Toledo de color rojo" lo representamos por : $\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{R}$ y la probabilidad de este suceso, sigue de la tabla :

	Rojo	**Azul**	**Totales**
SEAT Panda	2	8	**10**
SEAT Toledo	7	3	**10**
Totales	**9**	**11**	**20**

$$\boldsymbol{P(T \cap R) = 7/20}$$

La probabilidad de que el coche sea un Seat Toledo es :

	Rojo	**Azul**	**Totales**
SEAT Panda	2	8	**10**
SEAT Toledo	7	3	**10**
Totales	**9**	**11**	**20**

$$\boldsymbol{P(T)=10/20 = 1/2}$$

¿Qué ocurre si, una vez que el concursante ha elegido puerta, el presentador, le da la pista de que el coche que hay tras la puerta es rojo?. Tendremos que cambiar la probabilidad al suceso ***T*** y al suceso ***P***. A la probabilidad del suceso ***T*** cuando se sabe que ha ocurrido ***R***, le llamamos ***probabilidad condicionada de T, sabiendo que ha ocurrido R*** y escribimos:

$$\boldsymbol{P(T/R)}$$

Para asignar las nuevas probabilidades hemos de ser consecuentes con las propiedades que debe cumplir toda asignación de probabilidades. El nuevo espacio muestral es el señalado en rojo en la tabla siguiente. Por tanto asignamos así las probabilidades:

	Rojo	Azul	Totales
SEAT Panda	2	8	**10**
SEAT Toledo	7	3	**10**
Totales	**9**	**11**	**20**

P(T/R) = 7/9 ; P(P/R) = 2/9

De la tabla anterior, sigue fácilmente la siguiente relación:

$$p(T/R) = \frac{7}{9} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{p(T \cap R)}{p(R)}$$

Como podemos ver, en el cálculo de las probabilidades de algunos sucesos, el valor de dicha probabilidad variará en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos. Veamos otro ejemplo:

Si disponemos de una urna que contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4, extraemos una bola y seguidamente la volvemos a introducir para realizar una segunda extracción, la probabilidad de extraer, por ejemplo, la bola número 3 en la segunda extracción es la misma que en la primera.

Si realizamos el mismo proceso sin reemplazar la bola extraída la probabilidad de extraer, por ejemplo, la bola número 3 en la segunda extracción dependerá de la bola extraída en primer lugar.

Sean *A* y *B* dos sucesos. Se llama ***probabilidad de B condicionada a A, P(B/A),*** a la probabilidad de *B* tomando como espacio muestral *A*, es decir, a la probabilidad de que ocurra *B* dado que ha sucedido *A*.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Nota: De la misma manera $P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$*, y ambas probabilidades (* $P\left({}^{A}\!/_{B}\right)$ *y* $P\left({}^{B}\!/_{A}\right)$*) no tienen por qué coincidir.*

Ejemplo: Se lanzan dos dados:

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7?
b. Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres?

Solución:

Sean los sucesos A = "la suma de los puntos es 7" y B = "en alguno de los dados ha salido un tres".

a. Los casos posibles al lanzar dos dados son 36 y los casos favorables al suceso A son los seis siguientes: (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2) y (6,1). Por tanto, $P(A)=6/36=1/6$

b. En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observamos que $A \cap B = \{(3,4), (4,3)\}$. Por tanto:

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se podía haber hecho también teniendo en cuenta que de los 6 casos posibles para A, hay 2 favorables a B.

De la fórmula de la probabilidad condicionada se deduce:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B/A\right)$$

Si en lugar de tener dos sucesos tenemos n sucesos, la fórmula para la probabilidad de la intersección (llamada ***teorema de la probabilidad compuesta***) sería:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P\left(A_2/A_1\right) \cdot P\left(A_3/A_1 \cap A_2\right) \cdot \ldots\ldots \cdot P\left(A_N/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{N-1}\right)$$

Ejemplo: Se extraen consecutivamente y sin reemplazamiento dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de oros?

Solución:

Llamamos O_1 = "la primera carta extraída es de oros" y O_2 = "la segunda carta extraída es de oros". Entonces:

$$P(O_1 \cap O_2) = P(O_1) \cdot P\left(O_1/O_2\right) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

(La probabilidad $P\left(O_1/O_2\right) = \frac{9}{39}$ pues ya ha salido un oro y, por tanto, quedan 39 cartas de las que 9 son oros)

4.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

El conocimiento de que ha ocurrido el suceso *A* modifica, en algunas ocasiones, la probabilidad del suceso *B*, pero en otras no. Los sucesos en los que, conociendo que uno ha ocurrido, no se modifica la probabilidad del otro, decimos que son ***independientes*** y, si se modifica, decimos que son ***dependientes*** entre sí.

Así, si en el ejemplo anterior las extracciones se hubieran realizado con reemplazamiento, el resultado de la primera extracción no influiría en el resultado de la segunda, es decir, serían dos extracciones independientes.

Decimos que dos sucesos *A* y *B* son ***independientes*** entre sí si la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro, es decir, si

$$P(B/A) = P(B) \qquad ó \qquad P(A/B) = P(A)$$

En caso contrario diremos que *A* y *B* son ***dependientes***

Como consecuencia de esta definición se tiene que:

Dos sucesos son independientes si se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo: Se extraen consecutivamente y con reemplazamiento dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de oros?

Solución:

Llamamos O_1 = "la primera carta extraída es de oros" y O_2 = "la segunda carta extraída es de oros". Entonces, como ambas extracciones son independientes pues son con reemplazamiento:

$$P(O_1 \cap O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Otra consecuencia de la definición de independencia es:

Si A es independiente de B, entonces:

- B es independiente de A
- A y $\overline{B}$ también son independientes
- $\overline{A}$ y B también son independientes
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$ también son independientes

Además, para *n* sucesos independientes, sería:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ...... \cdot P(A_n)$$

Ejemplos:

1.- Una bolsa contiene 10 bolas negras y 6 blancas. Se extraen consecutivamente 4 bolas de la bolsa. Hallar la probabilidad de que todas sean blancas:

a) Si se extraen con reemplazamiento

b) Si se extraen sin reemplazamiento

Solución:

a) Con reemplazamiento implica que las 4 extracciones son independientes:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)\cdot P(B_4) = \frac{6}{16}\cdot\frac{6}{16}\cdot\frac{6}{16}\cdot\frac{6}{16} = \frac{81}{4096}$$

b) Sin reemplazamiento implica que las 4 extracciones son dependientes:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1)\cdot P\left(B_2 / B_1\right)\cdot P(B_3 / B_1 \cap B_2)\cdot P\left(B_4 / B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) =$$

$$= \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{3}{364}$$

2.- Se consideran dos sucesos A y B de los que se sabe que $P(A) = 0'6$, $P(B) = 0'3$, $P(A \cap B) = 0'2$

a) ¿Son A y B compatibles? ¿Son independientes?

b) Calcular $P(A \cup B)$ y $P\left(A / B\right)$

Solución:

a) Como $P(A \cap B) = 0'2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B \neq \varnothing$ y por tanto son compatibles

Como $P(A \cap B) = 0'2$ y $P(A)\cdot P(B) = 0'6 \cdot 0'3 = 0'18 \neq 0'2$ los sucesos A y B son dependientes

b) Como A y B son compatibles, aplicando la fórmula de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'3 - 0'2 = 0'7$

Por otra parte, usando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P\left(A / \overline{B}\right) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0'6 - 0'2}{1 - 0'3} = \frac{0'4}{0'7} = 0'57$$

3.- En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan de multicereales y el 20% consume ambos. Se pide:

a) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan de multicereales?
b) Sabiendo que un habitante consume pan de multicereales, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma pan integral?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan?

Solución:

Llamamos a los sucesos I = come pan integral , M = come pan multicereales.

a) $$P\left(M/I\right)=\frac{P(M\cap I)}{P(I)}=\frac{0'2}{0'55}=0'36$$

b) $$P\left(\bar{I}/M\right)=\frac{P(\bar{I}\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M)-P(I\cap M)}{P(M)}=\frac{0'3-0'2}{0'3}=0'33$$

c) $$P(\bar{I}\cap\overline{M})=\textit{por las leyes de De Morgan}=P(\overline{I\cup M})$$

Calculamos la de la unión:

$$P(I\cup M)=\textit{compatibles}=P(I)+P(M)-P(I\cap M)=$$
$$=0'55+0'3-0'2=0'65$$

Luego $P(\bar{I}\cap\overline{M})=P(\overline{I\cup M})=1-P(I\cup M)=1-0'65=0'35$

Ejercicios:

1.- En un conjunto de estudiantes el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.

a) ¿Son independientes los sucesos estudiar alemán y estudiar francés?
b) Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie francés ni alemán.
c) Si un alumno no estudia francés, ¿cuál es la probabilidad de que no estudie alemán?

2.- En un ayuntamiento hay 5 concejales del partido A, 4 del B y 1 del C. Si se eligen al azar y sucesivamente tres concejales, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean del partido A?

3.- Se consideran dos sucesos *A* y *B* de los que se sabe que
$P(A) = 0'6$, $P(B) = 0'3$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0'9$

a) ¿Son *A* y *B* independientes?
b) Calcular $P\left(\overline{A}/B\right)$

4.- Un monedero contiene 2 monedas de 1 € y 3 monedas de 2 €. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento 2 monedas. Calcular las probabilidades de que:

a) Las dos monedas sean de 1 €
b) Las dos monedas sean del mismo valor
c) Sacar 3 €

5.- Un profesor de matemáticas propone dos ejercicios. La probabilidad de resolver el 1º es 0’45, la de resolver el 2º es 0’3, y la de resolver al menos uno de los dos es 0’6

a) ¿Son independientes las resoluciones de cada ejercicio?
b) Calcular la probabilidad de no resolver ninguno de los dos ejercicios
c) Si un alumno ha resuelto el primer ejercicio, ¿qué probabilidad tiene de resolver el segundo?

6.- Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa. Se elige una persona al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico o estudie francés?
b) ¿Y de que sea chica y no estudie francés?

7.- Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que las dos bolas sean rojas
b) Probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color

8.- En una ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

9.- Se consideran dos sucesos A y B de los que se sabe que $P(\overline{B}) = 0'7$, $P(A \cap B) = 0'2$, $P(A \cap \overline{B}) = 0'5$

a) Calcular *P(A)*. ¿Son A y B independientes?
b) Calcular $P(A \cup B)$ y $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)$

10.- Se lanza cuatro veces una moneda

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 caras?
b) Si los tres primeros lanzamientos han sido cruz, ¿cuál es la probabilidad de que el 4º lanzamiento también lo sea?

5.- TABLAS DE CONTINGENCIA Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL

En los problemas de probabilidad y en especial en los de probabilidad condicionada, resulta interesante y práctico organizar la información en una tabla de contingencia o en un diagrama de árbol.

- Las ***tablas de contingencia*** son tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

En general:

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Dentro de la tabla pueden ir probabilidades, frecuencias absolutas o frecuencias relativas.

Vemos un ***ejemplo*:**

Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
b) Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

Organizamos la información en una tabla, completando las celdas que falten:

	Hombres	Mujeres	*Total*
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
Total	55	65	120

a) $P(Hombre\ y\ Soltero) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

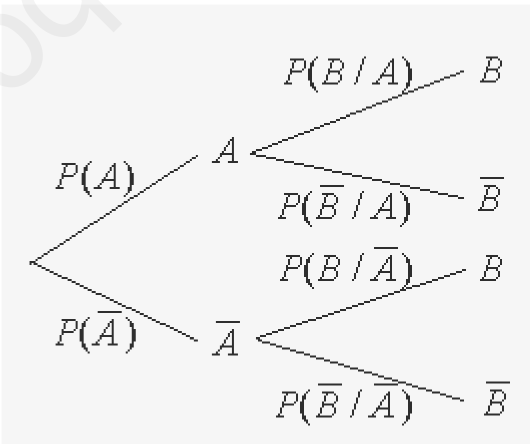
b) $P\left({}^{Mujer}\!/_{Casado} \right) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

- Para la construcción de un ***diagrama en árbol*** se partirá poniendo una *rama* para cada una de las *posibilidades*, acompañada de su *probabilidad*.

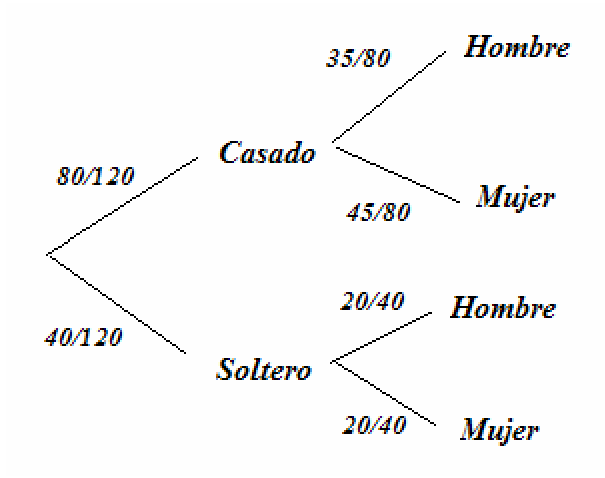
En el *final* de cada *rama parcial* se constituye a su vez, un *nudo* del cual parten nuevas *ramas*, según las *posibilidades* del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (*nudo final*).

Hay que tener en cuenta: que la *suma de probabilidades* de las *ramas* de cada *nudo* ha de dar **1**

Así:



Si organizamos los datos del ejemplo anterior mediante un diagrama de árbol, sería:



a) Para ver la probabilidad de un hombre soltero, multiplicamos las probabilidades del camino correspondiente:

$$P(Hombre\ y\ Soltero) = \frac{40}{120} \cdot \frac{20}{40} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

b) Para las probabilidades condicionadas nos fijamos en la rama correspondiente:

$$P\left(\frac{Mujer}{Casado}\right) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

En este caso nos fijamos en el *nudo* de los casados y, dentro de él, en la rama correspondiente a mujeres.

Ejercicios:

1.- Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana 3 automóviles con problemas eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa, y por la tarde 2 con problemas eléctricos, 3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.

a) Calcula la probabilidad de que un automóvil acuda por la tarde.
b) Calcula la probabilidad de que un automóvil acuda por problemas mecánicos.
c) Calcula la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana

2.- En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
b) Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

6.- TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y DE BAYES

Llamamos *sistema completo de sucesos* a una familia de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ que cumplen:

1. Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$$

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Es decir, para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso, hay que tener en cuenta la totalidad de las opciones que haya para que ese suceso ocurra.

Vemos un ***ejemplo***:

En una urna A hay 3 bolas rojas y 4 verdes; en otra urna B hay 5 bolas rojas y 5 verdes, y en una tercera urna C hay 5 bolas rojas y 3 verdes.

Se extrae al azar una bola de una de las urnas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde?

Solución:

Como se supone que las tres urnas tienen la misma probabilidad para sacar la bola de una de ellas, tenemos:

$$P(A) = \frac{1}{3} \ , \ P(B) = \frac{1}{3} \ , \ P(C) = \frac{1}{3}$$

Además, según los datos del ejercicio:

$$P\left(R/A\right) = \frac{3}{7} \ , \ P\left(V/A\right) = \frac{4}{7} \ , \ P\left(R/B\right) = \frac{5}{10} \ , \ P\left(V/B\right) = \frac{5}{10} \ , \ P\left(R/C\right) = \frac{5}{8} \ , \ P\left(V/C\right) = \frac{3}{8}$$

Usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(V)=P(A)\cdot P\left(V/A\right)+P(B)\cdot P\left(V/B\right)+P(C)\cdot P\left(V/C\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=$$
$$=\frac{4}{21}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{27}{56}=0'48$$

Nota: éste ejercicio también puede resolverse usando una tabla de contingencia o el diagrama de árbol correspondiente.

<u>Teorema de Bayes</u>

Sea A_1, A_2, ...,A_n un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. Entonces la probabilidad $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Nótese que el denominador coincide con la fórmula del Teorema de la Probabilidad Total, es decir, esta fórmula podría también escribirse como:

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right)}{P(B)}$$

Veamos un ***ejemplo***:

Supongamos la situación de urnas del ejemplo anterior.

Si se extrae una bola que resulta ser verde, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna A?

Solución:

Usando la fórmula del Teorema de Bayes:

$P\left(A/V\right)=\dfrac{P(A)\cdot P\left(V/A\right)}{P(V)}$ = (usando lo obtenido en el ejemplo anterior para *P(V)*) =

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{27}{56}}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{27}{56}}=\frac{4}{21}\cdot\frac{56}{27}=\frac{224}{567}=0'395$$

Obsérvese que con este teorema es la primera vez que aparece la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados.

Es decir, mientras que con el Teorema de la Probabilidad Total calculamos probabilidades de algo que aún no ha pasado (*probabilidad a priori*), con el Teorema de Bayes calculamos la probabilidad de de que algo que ya ha sucedido lo haya hecho por un determinado motivo (*probabilidad a posteriori*).

De hecho, es habitual encontrar ejercicios en los que haga falta usar ambos teoremas, y es importante distinguir cuándo usar uno y cuándo el otro.

Ejemplo:

Tres máquinas, *A*, *B* y *C*, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

a. Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
b. Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina *B*.

Solución:

Sea *D* = "la pieza es defectuosa" y *N* = "la pieza no es defectuosa".

a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, *P(D)*, por la propiedad de la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.038$$

b) Debemos calcular *P(B/D)* (probabilidad a posteriori, puesto que sabemos cómo ha sido ya la pieza extraída). Por el teorema de Bayes,

$$P(B/D) = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$
$$= \frac{0.30 \cdot 0.04}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05} = \frac{12}{38} = 0.316$$

Como ejercicio, calcular cuál de las tres máquinas tiene mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa.

Ejercicios:

1.- Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales a y cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?

Si se extrae una bombilla que resulta no estar fundida, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la segunda caja?

2.- En una casa hay tres llaveros A, B y C; el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para abrir el trastero. Se pide:

a) La probabilidad de que la llave abra la puerta del trastero
b) Si la llave escogida abre el trastero, ¿cuál es la probabilidad de que sea del llavero C?

3.- Los alumnos de E.S.O. de un determinado instituto están repartidos de la siguiente manera: 40% en 1º, 25% en 2º, 15% en 3º y el resto en 4º. El porcentaje de aprobados en cada uno está en el 30% para 1º, el 40% para 2º, 60% para 3º y 70% en 4º. Elegido un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya suspendido?
b) Si está suspenso, ¿qué probabilidad tiene de ser de 3º?

RESUMEN DE FÓRMULAS

- **Contrario:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- **Diferencia:** $P(A-B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- **Leyes de De Morgan:** $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$; $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$

- **Unión de dos sucesos:**

  Incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

  Compatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- **Unión de tres sucesos:**

  Incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(C)$

  Compatibles
  $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
  $$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- **Intersección:**

  Independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

  Dependientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B/A\right)$

- **Probabilidad Condicionada:**

  Independientes $P(A/B) = P(A)$

  Dependientes $P\left(A/B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- **Teorema de la Probabilidad Total:**

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

- **Teorema de Bayes:**

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

EJERCICIOS

1.- Lanzamos dos monedas al aire (primero una y luego la otra). Calcular la probabilidad de obtener:
a) Una sola cara
b) Al menos una cara
c) Dos caras
Sol: a) 1/2; b) 3/4; c) 1/4

2.- Un lote de diez artículos tiene tres defectuosos. Se toman al azar tres artículos del lote, uno tras otro. Hallar la probabilidad de que todos estén bien.
Sol: a) Con reemplazamiento $(7/10)^3$; b) Sin reemplazamiento 7/24

3.- De una baraja española se extraen dos naipes sucesivamente y sin devolver al mazo. Hallar la probabilidad de extraer:
a) Dos ases
b) La primera as y la segunda, tres
c) Un as y un tres
d) Dos oros
e) Del mismo palo
Sol: a) 1/130; b) 2/195; c) 4/195; d) 3/52; e) 3/13

4.- En una urna hay 3 bolas blancas y dos negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color y se devuelve a la urna. Calcular la probabilidad de que en dos extracciones se obtengan:
a) Dos bolas negras
b) Una bola de cada color
c) Dos bolas blancas
Sol: a) 4/25; b) 12/25; c) 9/25

5.- En una caja A, hay 10 bombillas, de las que 3 no funcionan; en otra caja B, hay 8 con 2 fundidas; y en una última caja C hay 12 bombillas de las que 3 con defectuosas. Se extrae una bombilla de cada caja. Obtener el espacio muestral y calcular las probabilidades de que:
a) Ninguna funcione
b) Funcionen las tres
c) Sólo una funcione
Sol: a) 3/160; b) 63/160 ; c) 5/32

6.- Un examen consta de cuatro partes independientes: álgebra, análisis, geometría y probabilidad. La preparación de un alumno es tal que, tiene una probabilidad de 0,6 de aprobar cada parte. Qué probabilidad tiene de suspender si: a) Las partes son eliminatorias; b) Si se necesitan dos partes para aprobar; c) Basta con aprobar una parte. Sol: a) 0,8704; b) 0,1792; c) 0,0256

7.- Un producto está formado por tres piezas: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que la pieza A sea defectuosa es 0,03; de que la pieza B sea defectuosa es 0,02; y de que la pieza C sea defectuosa es de 0,01. El producto no funciona si alguna de las piezas es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no funcione?. Sol: 0,059

8.- Calcula la probabilidad de que al tirar dos dados al aire, salga: a) Una suma par; b) Una suma mayor que diez; c) Una suma que sea múltiplo de 3.
Sol: a) 1/2; b) 1/12; c) 1/3

9.- Se tienen tres dados: uno blanco, otro negro y el tercero rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que salga par en el blanco, múltiplo de 3 en el negro y mayor que 3 en el rojo?. Sol: 1/12

10.- En un grupo de 1000 personas hay 400 que saben inglés, 100 que saben alemán y 30 ambos idiomas. Con estos datos, averigua si son independientes o no los sucesos "saber inglés" y "saber alemán". Sol: No

11.- El 55% de los alumnos de una clase estudia francés, el 50% inglés y el 15% estudia los dos idiomas. Se elige al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que: a) No estudie francés ni inglés; b) Estudie francés y no inglés; c) Estudie francés si se sabe que estudia inglés; d) Estudie inglés si se sabe que estudia francés. e) No estudie francés si se sabe que no estudia inglés.
Sol: a) 0,1; b) 0,4; c) 0,3; d) 0,273; e) 0,2

12.- El 60% de la población de una determinada ciudad lee el periódico A, el 35% el B y un 15% ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular la probabilidad de: a) ser lector de algún periódico; b) no leer ninguno; c) leer sólo el periódico A; d) leer sólo uno de los dos periódicos.
Sol: a) 0,8; b) 0,2; c) 0,45; d) 0,65

13.- Dados los sucesos: A y B, si la P(A) = 0'5, P(B) = 0'4 y la P(A1B) = 0'2, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
$a) A \cup B \quad b) \overline{A} \cap B \quad c) \overline{(A \cup B)} \quad d) \overline{A} / B \quad e) A / (A \cap B)$
Sol: a) 0'7; b) 0'2; c) 0'3; d) 0'5; e) 1

14.- La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0’6, la de que apruebe historia es 0’5, y la de que apruebe alguna de las dos es 0’9. Calcular las probabilidades de que un alumno escogido al azar:
a) Apruebe ambas b) No apruebe ninguna
Sol: a) 0’2 ; b) 0’1

15.- Se lanzan dos dados. Sea A el suceso “la diferencia entre las puntuaciones obtenidas es dos” y B el suceso “obtener, al menos, un seis”. Hallar la probabilidad de AUB.
Sol: 1/3

16.- La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es de 0’6 y 0’7, respectivamente. Se pide:
a) La probabilidad de que vivan ambos después de 50 años
b) La probabilidad de que viva sólo la mujer
c) La probabilidad de que viva al menos uno de los dos
d) La probabilidad de que no viva ninguno de los dos
Sol: a) 0’42 ; b) 0’28 ; c) 0’88 ; d) 0’12

17.- Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que P(A)=0’2, P(B)=0’8 y P(C)=0’7. Calcular las probabilidades de: $A\cup B$, $A\cup C$, $A\cup B\cup C$, $\overline{A}\cap\overline{B}$
Sol: 0’84 ; 0’76 ; 0’952 ; 0’16

18.- Una urna contiene 3 bolas rojas y dos blancas, y otra urna 2 blancas y 2 rojas. Se saca una bola de cada urna. Obtener el espacio muestral asociado a dicho experimento y calcular las probabilidades de que:
a) Las dos sean rojas
b) Al menos una bola sea blanca
Sol: a) 3/10 b) 7/10

19.- Se lanza una moneda 4 veces consecutivas. Obtener el espacio muestral asociado y calcular las probabilidades de obtener:
a) Sólo dos cruces y en tiradas no consecutivas
b) Al menos dos caras
c) Como mucho dos caras
Sol: a) 3/16 b) 11/16 c) 11/16

20.- Al llamar a la centralita de un hospital, la probabilidad de que el teléfono esté comunicando es 0’3, y de que la telefonista nos diga que el teléfono de la habitación con la que queremos hablar comunica es 0’2. Hallar la probabilidad de hablar con la habitación deseada
Sol: 0’56

21.- Se dispone de dos cañones cuyas probabilidades de hacer blanco son 0’1 y 0’3. Se hace un disparo con dada uno de ellos. Calcular el espacio muestral y las probabilidades de: a) No hacer blanco b) Al menos uno haga blanco
c) Hacer un solo blanco
Sol: a) 0’63 b) 0’37 c) 0’34

22. De dos sucesos A y B se sabe que:
$P(A)=0'4$, $P(A\cup B)=0'8$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0'7$
¿Son A y B independientes?

23. Se escoge al azar una ficha de dominó. Hallar la probabilidad de que el número de puntos sea: a) Mayor que 9 b) Múltiplo de 4 c) Mayor que 9 o múltiplo de 4
Sol: a) 1/7 b) ¼ c) 5/14

24.- Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Calcular la probabilidad de que una persona escogida al azar sea hombre o tenga los ojos castaños.
Sol: 2/3

25.- Sabiendo que $P(A)=0'3$, $P(\overline{B})=0'6$ y $P(A/B)=0'32$, calcular:
$a)P(A\cap B)$ $b)P(A\cup B)$ $c)P(A/\overline{B})$ $d)P(B/A)$ $e)P(\overline{A\cup B})$ $f)P(\overline{A\cap B})$

Sol: a) 0’128 b) 0’572 c) 0’287 d) 0’427 e) 0’428 f) 0’872

26.- En una cierta facultad el 25 % de los estudiantes suspenden la estadística, el 15 % el derecho y el 10 % ambas asignaturas. Se selecciona un estudiante al azar. Calcular la probabilidad de que:
a) Suspenda estadística o derecho
b) Suspenda estadística, sabiendo que ha suspendido derecho
c) Suspenda derecho, supuesto que ha suspendido estadística
d) No suspenda ninguna de las dos asignaturas
e) Suspenda sólo estadística

Sol: a) 0'3 b) 0'671 c) 0'4 d) 0'7 e) 0'15

26.- Una determinada pieza puede ser fabricada por dos máquinas M_1 y M_2, que funcionan independientemente. La máquina M_1 fabrica el 70 % de las piezas. El 15 % de las piezas fabricadas por M_1 y el 2 % de las fabricadas por M_2 son defectuosas. Se escoge al azar una de las piezas.
a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa
b) Si la pieza escogida es buena, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina M_1?

Sol: a) 0'111 b) 0'669

27.- Observa la siguiente tabla que representa a los empleados de una empresa:

	Hombres (H)	Mujeres (M)
Fuman (F)	70	10
No fuman (no F)	30	90

Elegida una persona al azar, calcular las probabilidades de que:
a) Sea hombre b) No fume c) Sea hombre fumador
d) Sea mujer sabiendo que es fumadora
e) El sexo y la condición de fumador, ¿son independientes?
Sol: a) 0'5 b) 0'6 c) 0'35 d) 0'125

28.- Tenemos tres urnas. La primera contiene 4 bolas rojas y 4 negras, la segunda 3 rojas y 1 negra y la tercera 2 rojas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y después extraemos una bola. Calcular la probabilidad de que sea negra.
Si realizamos el experimento y la bola extraída resulta ser roja, ¿cuál es la probabilidad de que la hayamos cogido de la primera urna?
Sol: 17/36 ; 6/19

29.- Un examen consta de 2 pruebas que hay que superar para aprobar. Sabemos que la probabilidad de pasar la 1ª prueba es 0,6 y la de pasar la 2ª es 0,7
a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?
b) ¿Y de suspenderlo en la segunda prueba?
Sol: a) 0'42 b) 0'18

30.- Se tiene una bolsa con 10 bolas rojas y 6 negras, de la que se extraen dos bolas. Halla la probabilidad de que ambas sean negras.
a) Con devolución a la bolsa de la 1ª bola extraída.
b) Sin devolución.
Sol: a) 9/64 b) 1/8

31.- Se ha seguido la pista a 100.000 coches de tres marcas distintas A, B y C durante un año. Unos han tenido un accidente serio (Ac) y otros no (No Ac). Se reparten según la tabla:

	A	B	C
Ac	650	200	150
No Ac	49350	19800	29850

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche elegido al azar haya tenido un accidente?
b) ¿Cuál de las tres marcas es más segura?
Sol: a) 0’01 b) la marca C

32.- Un ratón huye de un gato. Puede escapar por los callejones A, B y C. La probabilidad de que el ratón huya por el callejón A es 0,3 que lo haga por el B 0,5 y por el C 0,2.
Si huye por A la probabilidad de ser alcanzado por el gato es 0,4.
Si lo hace por B hay una probabilidad de ser cazado de 0,6
Finalmente, si huye por el callejón C la probabilidad es 0,1.
Calcula la probabilidad de que el gato alcance al ratón.
Supongamos que el ratón ha sido cazado por el gato. Calcula la probabilidad de que haya huido por el callejón B.
Sol: 0’44 ; 0’68

33.- Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con p(A) = 0,7, p(B) = 0,6 y $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$. Estudia si son independientes A y B

34.- La probabilidad de que un hombre fume es 0,6 y la de que una mujer sea fumadora es 0,3. En una fábrica hay un 75 % de hombre y un 25 % de mujeres. Tomamos una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que fume?
Una persona desconocida ha dejado un cigarrillo encendido y se ha producido un pequeño incendio. ¿Cuál es la probabilidad de que el causante fuera un hombre?.
Sol: 0’525 ; 0’857

35.- Un avión tiene 5 bombas. Se desea destruir un puente. La probabilidad de destruirlo de un bombazo es 1/5. ¿Cuál es la probabilidad de que se destruya el puente si se lanzan las cinco bombas?
Sol: 0’67232

36.- Se escuchan tres CDs y se vuelven a guardar en sus fundas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos unos de ellos haya sido guardado en la funda que le correspondía?
Sol: 2/3

37.- En un examen teórico para obtener el carnet de conducir se puede hacer el ejercicio correspondiente a cada uno de los tipos de carnet A, B y C. Aprueban el examen el 65% de A, el 40% de B y el 25% de C. Se sabe que el 20% se presentan al ejercicio A, el 50% al B y el 30% al C. Elegido un alumno al azar, determina: a) La probabilidad de que se presente al A y haya aprobado. b) Se sabe que ha aprobado. Probabilidad de que se presentase al ejercicio A. Sol: a) 0,13; b) 0,32

38.- En unos almacenes hay una oferta: al comprar un producto se puede elegir un regalo entre dos (A y B). El 35% de los clientes elige el regalo A, el 25% elige el B y el 40% no compra ese producto. Se sabe, además, que el 80% de los que eligen A, el 40% de los de B y el 20% de los que no compran, son mujeres. Elegido al azar un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?. Sol: 0,46

39.- En un cierto país, los ascensos de barrendero a jefe de escoba son muy disputados. Se puede acceder por tres conductos: por oposición, por concurso de méritos o por enchufe con el ministro de Limpieza Pública.
La probabilidad de que un opositor alcance la plaza es de 0,2.
La probabilidad de que se obtenga la plaza si se concurso es 0,8.
Todos los enchufados del ministro de Limpieza Pública consiguen puesto.
Sabiendo que los aspirantes a jefes de escoba se reparten del siguiente modo:
70 % son opositores; 25 % concursan; 5 % consiguen el enchufe, calcular:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto jefe de escoba alcance la plaza por oposición?
b) ¿Cuántos de los 2730 jefes de escoba del país consiguieron el ascenso por enchufe?

Sol: a) 0’358 b) 350

40.- En una Universidad existen tres facultades: A, B y C. En A hay matriculadas 150 chicas y 50 chicos; en B, 300 chicas y 200 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos.

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.
b) Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico, ¿cuál es su facultad más probable?

Sol: a) 23/60 b) la C