

EJERCICIOS: TEMA 1: MATRICES.

1º/ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,
determinar los valores x, y, z que hacen posible la igualdad $A \cdot B = A + C$.

2º/ Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que verifique: $A \cdot X = X \cdot A$.

4º/ Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

5º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

6º/ Calcula A^{2000} , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

8º/ Determine los valores x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

9º/ Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m .

10º/ Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

SOLUCIONES:

1º/ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,
determinar los valores x, y, z que hacen posible la igualdad $A \cdot B = A + C$.

$$A \cdot B = A + C$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3z \\ x+y-6 & 5 & 1-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando los coeficientes de ambas matrices, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} (1) & 2x+y=0 & (4) \quad -x+9=10 & (7) \quad x+y-6=-5 \\ (2) & 1=1 & (5) \quad -6=-6 & (8) \quad 5=5 \\ (3) & 2=2 & (6) \quad -1+3z=2 & (9) \quad 1-2z=-1 \end{array}$$

Las ecuaciones (2), (3), (5) y (8), evidentemente se cumplen cualesquiera que sean los valores de las incógnitas.

De la ecuación (4): $-x+9=10 \Rightarrow -x=10-9 \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1$

De la ecuación (6): $-1+3z=2 \Rightarrow 3z=2+1 \Rightarrow z=\frac{3}{3} \Rightarrow z=1$

De la ecuación (1): $2x+y=0 \Rightarrow 2 \cdot (-1)+y=0 \Rightarrow -2+y=0 \Rightarrow y=2$

Luego la solución es $x=-1, y=2, z=1$, y las ecuaciones (7) y (9) se cumplen para estos valores.

2º/ Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} = C$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Eliminamos A :

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ -2 \cdot (A + 2B = D) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ -2A - 4B = -2D \end{array} \right\}$$

$$-5B = C - 2D \Rightarrow B = \frac{-1}{5}(C - 2D)$$

$$B = \frac{-1}{5}(C - 2D) = \frac{-1}{5} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 5 & 15 \\ 0 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminamos B :

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \cdot (2A - B = C) \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4A - 2B = 2C \\ A + 2B = D \end{array} \right\}$$

$$5A = 2C + D \Rightarrow A = \frac{1}{5}(2C + D)$$

$$A = \frac{1}{5}(2C + D) = \frac{1}{5} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que verifique: $A \cdot X = X \cdot A$.

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Desarrollamos la igualdad $A \cdot X = X \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b+c & 0 \\ d & -e+f & 0 \\ g & -h+i & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$\begin{array}{lll} (1) & a=a & (4) & -d=d & (7) & d=g \\ (2) & b=-b+c & (5) & -e=-e+f & (8) & e=-h+i \\ (3) & c=0 & (6) & -f=0 & (9) & f=0 \end{array}$$

De estas ecuaciones deducimos: $b=0$, $c=0$, $d=0$, $f=0$, $g=0$, $i=e+h$.

Por lo tanto, las soluciones son de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & e+h \end{pmatrix}, \text{ donde } a, e, h \in \mathbb{R}.$$

4º/ Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

a) Dado que A es de dimensión 2×3 y C es de dimensión 3×2 para que pueda efectuarse $A \cdot M \cdot C$ tendríamos que:

Número de filas de $M =$ Número de columnas de $A = 3$.

Número de columnas de $M =$ Número de filas de $C = 3$.

Por tanto, M ha de ser una matriz cuadrada de orden 3.

b) C^t es una matriz de dimensión 2×3 , luego para que pueda efectuarse el producto $C^t \cdot N$:

Número de filas de $N =$ Número de columnas de $C^t = 3$.

El producto $C^t \cdot N$ tendrá 2 filas y sus columnas será el número de columnas de N , por lo que para que el resultado sea una matriz cuadrada, el número de columnas de N ha de ser 2.

En conclusión, N será de dimensión 3×2 .

$$c) A^t \cdot B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

5º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6º/Calcula A^{2000} , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \dots$$

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \text{ por lo tanto: } A^{2000} = \begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2000} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}.$$

7º/ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \dots$$

$A^n = I$ si n es par, y $A^n = A$ si n es impar, por lo que $A^{2004} = I$.

8º/ Determine los valores x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Operando: $\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$.

Igualando y resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{array} \right\} \text{ Solución: } x = \frac{-5}{4}, \quad y = \frac{-7}{4} .$$

9º/ Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m .

Aplicamos el método de Gauss, para hacer ceros por debajo de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m+45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} F_3 \rightarrow 3F_3 + 5F_2 \end{array}$$

Si $3m+45=0 \Rightarrow m = \frac{-45}{3} = -15$.

Por tanto:

Si $m = -15 \Rightarrow r(A) = 2$ (hay 2 filas no nulas).

Si $m \neq -15 \Rightarrow r(A) = 3$ (las 3 filas son no nulas).

10º/ Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\left. \begin{array}{l} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = A \\ 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{cases}$$

Eliminamos Y :

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot (3X - 2Y = A) \\ -2 \cdot (4X - 3Y = B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9X - 6Y = 3A \\ -8X + 6Y = -2B \end{array}$$

$$X = 3A - 2B$$

$$Y = 3A - 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$$

Eliminamos X :

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot (3X - 2Y = A) \\ -3 \cdot (4X - 3Y = B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12X - 8Y = 4A \\ -12X + 9Y = -3B \end{array}$$

$$Y = 4A - 3B$$

$$Y = 4A - 3B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$$