Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Halla la derivada de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas (en ambos casos se trata de derivar de manera implícita y luego despejar y').

   a) $x = \cos(xy)$

   b) $\dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{y} = 6$

2. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

   b) $y = \sqrt[x]{x^3}$

3. **[2 puntos]** Determina los valores de *m*, *n* y *k* para los que puede aplicarse el teorema de Rolle a la siguiente función en su intervalo de definición.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ kx + 1 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

4. **[2 puntos]** En el segmento comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ de la parábola $y = x^2$, halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda *AB*. Halla también las ecuaciones de la cuerda y de la tangente en dicho punto.

5. **[2 puntos]** Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$, de modo que el punto (a,b) tiene ambas coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x^2} + 4$. De todos estos rectángulos, determina razonadamente el de área mínima.

Soluciones

1. Halla la derivada de la función $y=f(x)$ definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas (en ambos casos se trata de derivar de manera implícita y luego despejar y'):

a) $x=\cos(xy)\Rightarrow 1=-\operatorname{sen}(xy)\cdot(1y+xy')\Rightarrow 1=-y\operatorname{sen}(xy)-xy'\operatorname{sen}(xy)\Rightarrow$

$\Rightarrow xy'\operatorname{sen}(xy)=-y\operatorname{sen}(xy)-1\Rightarrow y'=\dfrac{-y\operatorname{sen}(xy)-1}{x\operatorname{sen}(xy)}$

b) $\dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{y}=6\Rightarrow\dfrac{y'}{3}-\dfrac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=0\Rightarrow\dfrac{y'y^2-3y+3xy'}{3y^2}=0\Rightarrow\dfrac{y'\left(y^2+3x\right)-3y}{3y^2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow y'\left(y^2+3x\right)-3y=0\Rightarrow y'\left(y^2+3x\right)=3y\Rightarrow y'=\dfrac{3y}{y^2+3x}$

Otra forma. Si se eliminan denominadores: $y^2-3x=18y$. Derivando en ambos miembros:

$2yy'-3=18y'\Rightarrow 2yy'-18y'=3\Rightarrow y'(2y-18)=3\Rightarrow y'=\dfrac{3}{2y-18}$

2. Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\Rightarrow\ln y=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\Rightarrow\ln y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. Derivando ambos miembros de la igualdad:

$\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=y\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)\Rightarrow y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)$

b) $y=\sqrt[x]{x^3}\Rightarrow y=x^{3/x}\Rightarrow\ln y=\ln x^{3/x}\Rightarrow\ln y=\dfrac{3}{x}\ln x\Rightarrow\ln y=\dfrac{3\ln x}{x}$. Derivando en ambos miembros:

$\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{\dfrac{3}{x}\cdot x-3\ln x}{x^2}\Rightarrow\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{3-3\ln x}{x^2}\Rightarrow y'=y\dfrac{3-3\ln x}{x^2}\Rightarrow y'=\sqrt[x]{x^3}\,\dfrac{3-3\ln x}{x^2}$

3. Determina los valores de m, n, y k para los que puede aplicarse el teorema de Rolle a la siguiente función en su intervalo de definición: $f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n & \text{si } 0\le x\le 2\\ kx+1 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}$

Para que se cumpla el teorema de Rolle f ha de cumplir las siguientes hipótesis: ser continua en $[0,4]$, derivable en $(0,4)$ y $f(0)=f(4)$. La continuidad y derivabilidad está asegurada, salvo en $x=2$, porque los trozos en los que está dividida f son funciones polinómicas.

Para que f sea continua en $x=2$ se debe cumplir: $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow 4+2m+n=2k+1$

Para que f sea derivable en $x=2$ deben existir las derivadas laterales y ser iguales. La función derivada es $f'(x)=\begin{cases}2x+m & \text{si } 0\le x<2\\ k & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}$. Entonces $f'_-(2)=f'_+(2)\Leftrightarrow 4+m=k\Leftrightarrow m=k-4$

Por último, como $f(0)=f(4)$, entonces $n=4k+1$

Tenemos pues tres condiciones: $\left.\begin{array}{l} 4+2m+n=2k+1 \\ m=k-4 \\ n=4k+1 \end{array}\right\}$. Sustituyendo la segunda y tercera en la primera:

$4+2(k-4)+4k+1=2k+1 \Rightarrow 4+2k-8+4k+1=2k+1 \Rightarrow 4k=4 \Rightarrow k=1$. Y sustituyendo este valor en las dos últimas: $m=1-4 \Rightarrow m=-3$, $n=4k+1 \Rightarrow n=5$.

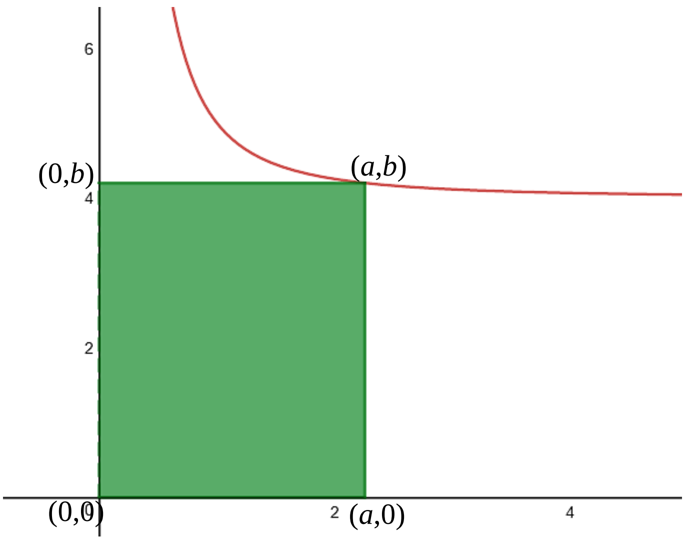
4. En el segmento comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ de la parábola $y=x^2$, halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda *AB*. Halla también las ecuaciones de la cuerda y de la tangente en dicho punto.

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,3]$, tenemos que existe $c \in (1,3)$ tal que $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2} \Rightarrow f'(c)=4$. Entonces $2c=4 \Rightarrow c=2$.

La cuerda *AB* tiene por ecuación $y=mx+n$ y pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$, es decir,

$\left.\begin{array}{l} 1=m+n \\ 9=3m+n \end{array}\right\} \Rightarrow m=4$, $n=-3$. Luego la cuerda es la recta $y=4x-3$. La recta tangente en $c=2$, es $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y-4=4(x-2) \Rightarrow y-4=4x-8 \Rightarrow y=4x-4$.

5. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$, de modo que el punto (a,b) tiene ambas coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y=\frac{1}{x^2}+4$. De todos estos rectángulos, determina razonadamente el de área mínima.



El área del rectángulo es ab. Como el punto (a,b) está sobre la curva $y=\frac{1}{x^2}+4$, se tiene que $b=\frac{1}{a^2}+4$, luego el área del rectángulo es

$A=a\left(\frac{1}{a^2}+4\right)=\frac{1}{a}+4a$, $A'=-\frac{1}{a^2}+4$,

$A'=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2}+4=0 \Leftrightarrow -1+4a^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2=1 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$. La solución

$a=-\frac{1}{2}$ hay que descartarla por ser negativa. La solución $a=\frac{1}{2}$ es un mínimo de *A* porque a la izquierda de $\frac{1}{2}$, $A'<0$ y a la derecha de $\frac{1}{2}$, $A'>0$. Por tanto el rectángulo de área mínima es el que tiene por vértices los puntos $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},8\right)$ y $(0,8)$.