Integrales racionales

Son integrales del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, donde q(x) es un polinomio que solo *tiene* *<u>raíces reales.</u>*

<u>Caso I)</u> Si grado de p(x)<grado q(x) , y q(x) tiene **<u>sólo raíces simples</u>**, se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples del tipo $\frac{A_i}{(x-x_1)}$ es decir, (por ejemplo si q(x) tiene tres raíces reales simples), $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_{21}} + \frac{C}{(x-x_3)} \Rightarrow$

$\int \frac{\text{p(x),}}{\text{q(x)}}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx + \int \frac{C}{(x-x_3)}dx$ de tal forma que estas integrales son ya inmediatas e iguales a

A $\mathrm{Ln}|x-x_1|$+ B $\mathrm{Ln}|x-x_2|$ +C $\mathrm{Ln}|x-x_3|$+Con stante

<u>Caso II)</u> Si grado de p(x)<grado q(x) , y q(x) tiene raíces simples y/o múltiples, se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones del tipo $\frac{A_i}{(x-x_1)}$ y $\frac{A_i}{(x-x_1)^n}$ es decir, (por ejemplo si q(x) tiene una raíz simple y una doble)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{\text{p(x),}}{\text{q(x)}}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx + \int \frac{C}{(x-x_2)^2}dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + \frac{C(x-x_2)^{-1}}{-1}$$

ya que $\int \frac{C}{(x-x_2)^2}dx = (cambio\ \ t = x-x_2) = \int \frac{C}{t^n}dt = \int Ct^{-n}dt = C - \frac{t^{-n+1}}{(-n+1)} = \frac{C}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-x_2)^{n-1}}$

<u>Caso III)</u> grado de p(x)>grado q(x) $\Rightarrow$ dividimos p(x) entre q(x) y aplicamos que:
dividendo = divisor por cociente +resto entonces para este caso
p(x) = c(x).q(x)+resto (el resto de grado inferior al divisor) o sea $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)}$ entonces

$\int \frac{\text{p(x)}}{\text{q(x)}}dx = \int (c(x) + \frac{r}{q(x)})dx = \int c(x)dx + \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx + \int \frac{C}{(x-x_3)}dx$ y ya es el caso anterior . (**si** q(x) tiene tres raíces reales simples)

Ejemplo:

Caso I) $\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)}dx$, raíces del denominador x=1 y x=2

$\frac{2x+1}{(x^2-3x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x-2}$ para buscar A y B , reducimos a común denominador el segundo miembro de la igualdad y llegamos a

i)A(x-2)+B(x-1)=2x+1 ; para x=2 B=5 y para x=1 -A=3 o sea A=-3

ii) o también de la igualdad de polinomios : $\begin{pmatrix} A+B=2 \\ -2A-B=1 \end{pmatrix}$

$\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)}dx = \int \frac{-3}{(x-1)}dx + \int \frac{5}{(x-2)}dx$=-3 Ln|x-1|+5 Ln|x-2|+cte

caso II) $\int \frac{2x^3-5x+2}{x^2-4}dx =$ como el grado del numerador es > mayor que el grado del denominador, dividimos $2x^3-5x+2 = 2x(x^2-4)+3x+2$

$\frac{2x^3-5x+2}{x^2-4} = 2x + \frac{3x+2}{x^2-4}$ y según (**) $\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$; 3x+2=A(x+2)+B(x-2) ; para x=-2 –4=-4B y para x=2 8=4A

$$\int \frac{2x^3-5x+2}{x^2-4}dx = \int (2x + \frac{3x+2}{x^2-4})dx = x^2 + 2Ln|x-2| \ \ + 1Ln|x+2| \ \ + cte$$