

VECTORES EN EL ESPACIO

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, COMBINACIÓN LINEAL, BASE

EJERCICIO 1 : Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

b) Expresa, si es posible, el vector \vec{d} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Solución:

a) No forman una base, pues cuatro vectores en \mathbb{R}^3 siempre son linealmente dependientes.

b) Debemos encontrar tres números, x , y , z , tales que: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$$(-1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5) \quad (-1, 1, 3) = (x + y + z, 2x + y, 3x + y + 5z)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss y obtenemos : $x = 2, y = -3, z = 0 \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 0\vec{c}$

EJERCICIO 2 :

a) Se sabe que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que \vec{u} es combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} ? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, -2), (0, 0, 3)\}$.

Solución:

a) No. Por ejemplo, si tomamos $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, y $\vec{w}(0, 2, 0)$:

– Son linealmente dependientes, pues $\vec{w} = 2\vec{v}$.

– Sin embargo, \vec{u} no es combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} .

b) Llamamos $\vec{b}(2, 1, 0)$, $\vec{c}(1, 0, -2)$, $\vec{d}(0, 0, 3)$ a los vectores de la base B . Tenemos que encontrar tres números, x , y , z , tales que: $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$

$$(4, 3, 7) = x(2, 1, 0) + y(1, 0, -2) + z(0, 0, 3) \quad (4, 3, 7) = (2x + y, x - 2y + 3z)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x = 3 \\ -2y + 3z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 - 2x = -2 \\ 3z = 7 + 2y \rightarrow z = \frac{7 + 2y}{3} = 1 \end{array}$$

Las coordenadas de \vec{a} respecto de la base B son $(3, -2, 1)$, es decir: $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$

EJERCICIO 3 : Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

c) Halla un vector, \vec{w} , tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Solución:

a) Sí son linealmente independientes, puesto que si escribimos:

$x(2, -1, 0) + y(3, 2, -1) = (0, 0, 0)$, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ -y = 0 \end{array} \right\} \text{ Este sistema solo tiene la solución trivial: } x = y = 0$$

b) No forman una base de \mathbb{R}^3 , pues para obtener una base de \mathbb{R}^3 necesitamos tres vectores (linealmente independientes).

$$c) 2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v} \rightarrow 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} \rightarrow \vec{w} = \frac{1}{6}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{6}(3, 2, -1) - \frac{2}{3}(2, -1, 0) = \left(\frac{-5}{6}, 1, \frac{-1}{6}\right)$$

EJERCICIO 4 :

- a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, siendo $\vec{u} (2,0,-3)$, $\vec{v} (1,-2,0)$ y $\vec{w} (3,2,-6)$
b) ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

Solución:

$$\begin{cases} x(2, 0, -3) + y(1, -2, 0) + z(3, 2, -6) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2x + y + 3z, -2y + 2z, -3x - 6z) = (0, 0, 0) \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -3x - 6z = 0 \end{cases} \quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Soluciones: } x = -2\lambda, y = \lambda, z = \lambda$$

b) Según los resultados obtenidos en el apartado a), deducimos que los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son base.

EJERCICIO 5 : Consideramos la base de \mathbb{R}^3 formada por los vectores : $\vec{a} (2,-1,3)$, $\vec{b} (0,2,-1)$, $\vec{c} (3,0,1)$

- a) Halla las coordenadas de $\vec{u} (4, -7, 14)$ respecto de la base anterior.
b) Expresa, si es posible, el vector \vec{c} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{u} .

Solución:

a) Tenemos que encontrar tres números x, y, z , tales que: $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, es decir:
 $(4, -7, 14) = x(2, -1, 3) + y(0, 2, -1) + z(3, 0, 1) \Rightarrow (4, -7, 14) = (2x + 3z, -x + 2y, 3x - y + z)$

$$\begin{cases} 2x + 3z = 4 \\ -x + 2y = -7 \\ 3x - y + z = 14 \end{cases} \quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Solución: } x = 5, y = -1, z = -2$$

Por tanto, las coordenadas de \vec{u} respecto de la base dada son $(5, -1, -2)$, es decir: $\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

b) De la igualdad obtenida en a), tenemos

$$\text{que: } \vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} \rightarrow 2\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b} - \vec{u} \rightarrow \vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{u}$$

PRODUCTO ESCALAR Y APLICACIONES (Módulo de un vector, ángulo que forman dos vectores, proyección ortogonal,...)

EJERCICIO 6 : Dados los vectores $\vec{u} (2, -1, 3)$, $\vec{v} (4, 2, -2)$ y $\vec{w} (1, 2, x)$:

- a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
b) Obtén el valor de x para que \vec{u} y \vec{w} formen un ángulo de 60° .

Solución:

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74$ $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \approx 4,90$

Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8 - 2 - 6}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares, es decir, } \alpha = 90^\circ.$$

b) Ha de cumplirse que: $\cos 60^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$, es decir: $\frac{1}{2} = \frac{2 - 2 + 3x}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5 + x^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3x}{\sqrt{70 + 14x^2}}$

$$\sqrt{70 + 14x^2} = 6x \rightarrow 70 + 14x^2 = 36x^2 \rightarrow 70 = 22x^2$$

$$x^2 = \frac{70}{22} = \frac{35}{11} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{35}{11}} & \text{(no vale, pues } \vec{u} \cdot \vec{w} = 3x > 0) \\ x = \sqrt{\frac{35}{11}} \end{cases}$$

EJERCICIO 7 : Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

a) Halla la proyección de \vec{u} sobre \vec{v} , así como el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , y que sea perpendicular a $(1, 0, 0)$.

Solución:

$$\text{Proyección de } u \text{ sobre } v: \vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que: $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$

b) Un vector que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} es de la forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, es decir:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) = (a + b, b, 0)$$

Para que sea perpendicular a $(1, 0, 0)$, su producto escalar ha de ser cero:

$$(a + b, b, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

Por tanto, cualquier vector de la forma: $(0, b, 0)$, con $b \neq 0$ cumple las condiciones exigidas.

EJERCICIO 8 : Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen, el mismo módulo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = \\ &= 4 + 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) + 4 = 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 8 + 4\sqrt{2} \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \approx 3,70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ + 4 = 8 - 4\sqrt{2} \\ |\vec{u} - \vec{v}| &= \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \approx 1,53 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$$

EJERCICIO 9 : Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de m para que \vec{a} y \vec{c} sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman \vec{b} y \vec{c} .

Solución:

$$\text{a) } \vec{c} = m\vec{a} - \vec{b} = m(1, -1, 0) - (0, 1, -1) = (m, -m-1, 1)$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = (1, -1, 0) \cdot (m, -m-1, 1) = m + m + 1 = 2m + 1 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

b) Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2, -3, 1)$. Si llamamos α al ángulo que forman \vec{b} y \vec{c} ,

$$\text{tenemos que: } \cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0,76 \rightarrow \alpha = 139^\circ 27' 51''$$

EJERCICIO 10 : Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a \vec{b} y tenga el mismo módulo que \vec{a} .

Solución: $\vec{a}(2, -1, 0)$ $\vec{b}(1, 2, -1)$ $\vec{c}(x, y, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \rightarrow x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \quad 5y^2 = 5 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow x = 2 \\ y = 1 \rightarrow x = -2 \end{cases} \end{array}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2, y = -1$, que corresponde a $\vec{c}(2, -1, 0)$.
- $x = -2, y = 1$, que corresponde a $\vec{c}(-2, 1, 0)$.

PRODUCTO VECTORIAL

EJERCICIO 11 : Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

- Halla un vector, \vec{w} , de módulo 1, que sea perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} .
- ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} ?

Solución:

a) Un vector perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} es: $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 0) \times (2, 1, 1) = (3, -1, -5)$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1: $\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$

Hay dos soluciones: $\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$ y $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right)$

b) Área = $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5,92 \text{ u}^2$

EJERCICIO 12 :

a) Demuestra que, si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Solución:

a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} \stackrel{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

b) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 1) \times (3, 0, -1) = (1, 5, 3)$

EJERCICIO 13 : Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

Solución:

• El área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} es igual a $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

• Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y hallamos su módulo: $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 0, 1) \times (0, m, 1) = (-m, -2, 2m)$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-m)^2 + (-2)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + 4 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 4}$$

Iguales a 2: Área = $\sqrt{5m^2 + 4} = 2 \rightarrow 5m^2 + 4 = 4 \rightarrow 5m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

EJERCICIO 14 :

- a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a $(3, -1, 1)$ y a $(1, -2, 0)$
b) ¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.

Solución:

- a) Un vector perpendicular a los dos dados es: $(3, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -5)$

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1: $\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

También cumple las condiciones su opuesto: $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

- b) En general, no es cierto. Por ejemplo: $\vec{u} = (1, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 0)$ $\vec{w} = (0, 1, 0)$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{u} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0) \end{aligned} \right\} \text{Por tanto, } (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

EJERCICIO 15 : Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$, siendo: $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Solución:

- Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$: $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 2, 2)$ $\vec{b} = \vec{u} \times \vec{w} = (-1, -1, 1)$

El área del paralelogramo determinado por a y b es igual al módulo del producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 2) \times (-1, -1, 1) = (4, -2, 2)$$

$$\text{Área} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} \approx 4,90 \text{ u}^2$$

PRODUCTO MIXTO

EJERCICIO 16 :

- a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$, $\vec{w}(2, -3, 0)$
b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?: $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$

Solución:

- a) El volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual al valor absoluto

$$\text{de su producto mixto: } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \rightarrow \text{Volumen} = 17 \text{ u}^3$$

- b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que: $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \cdot (-17) = -34$
 $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

EJERCICIO 17 :

- a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.
b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} para el caso $m = 3$.

Solución:

- a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4 \Rightarrow \text{Ha de ser } m \neq 4.$$

- b) Para $m = 3$, los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, y forman una base de \mathbb{R}^3 .
Por tanto, cualquier vector de \mathbb{R}^3 , en particular $(2, 1, 0)$, depende linealmente de ellos.

EJERCICIO 18 : Dados los vectores $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(1,1,1)$ y $\vec{w}(1,\lambda,5)$, halla el valor de λ para que:
a) determinen un paralelepípedo de volumen 10. b) sean linealmente dependientes.

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual al valor absoluto

$$\text{de su producto mixto: } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

$$\text{Volumen} = |2\lambda - 6| = 10 \quad \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 \rightarrow 2\lambda = 16 \rightarrow \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 \rightarrow 2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

Hay dos soluciones: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$

b) Su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = 3$

EJERCICIO 19 : Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

Solución:

a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow \text{Volumen} = 4 \text{ u}^3$

b) Los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{a} han de ser linealmente dependientes (\vec{u} y \vec{v} son linealmente independientes);

por tanto, su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \rightarrow \alpha = 4$

EJERCICIO 20 :

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k .

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} ?

Solución:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de k .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto: $\text{Volumen} = 12 \text{ u}^3$

REPASO

EJERCICIO 21 : Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, -1, 0)$ y $\vec{w}(m, 2, -m)$:

a) Halla el valor de m para que \vec{u} y \vec{w} sean perpendiculares.

b) Calcula el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} . c) Halla el área del triángulo que determinan \vec{u} y \vec{v} .

Solución:

a) Para que \vec{u} y \vec{w} sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, -1, 1) \cdot (m, 2, -m) = 2m - 2 - m = m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$$

b) Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{60}} \approx 0,904 \rightarrow \alpha = 25^\circ 21' 6''$$

$$c) \text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |(1, 3, 1)| = \frac{1}{2} \sqrt{1+9+1} = \frac{1}{2} \sqrt{11} \approx 1,66 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 22 : Consideramos los vectores $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(0, -2, 1)$ y $\vec{c}(3, 2, 1)$. Calcula:

a) El área del triángulo que determinan \vec{a} y \vec{b} .

b) El volumen del paralelepípedo determinado por \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Solución:

$$a) \text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 2) \times (0, -2, 1)| = \frac{1}{2} |(5, -1, -2)| = \frac{1}{2} \sqrt{25+1+4} = \frac{1}{2} \sqrt{30} \approx 2,74 \text{ u}^2$$

b) El volumen es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Volumen} = 11 \text{ u}^3$$

EJERCICIO 23 : Dados los vectores $\vec{u}(-1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 0, -3)$ y $\vec{w}(k, 1, k)$:

a) Halla el valor de k para que el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} valga 11u^3 .

b) Calcula el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = -5k - 1 \Rightarrow \text{Volumen} = |-5k - 1| = 11 \rightarrow \begin{cases} -5k - 1 = 11 \rightarrow k = \frac{-12}{5} \\ -5k - 1 = -11 \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

b) Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \approx 0,80 \rightarrow \alpha = 36^\circ 48' 31''$$

EJERCICIO 24 : Dados los puntos $A(-2,0,1)$, $B(1,-3,2)$, $C(-1, 4, 5)$ y $D(3, 1, -2)$, calcula:

a) El área del triángulo de vértices A , B y C .

b) El volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .

Solución:

$$a) \vec{AB}(3, -3, 1); \vec{AC}(1, 4, 4)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-16, -11, 15)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-16)^2 + (-11)^2 + 15^2} = \frac{1}{2} \sqrt{602} = 12,27 \text{ u}^2$$

$$b) \vec{AB}(3, -3, 1); \vec{AC}(1, 4, 4); \vec{AD}(5, 1, -3)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -136 \rightarrow \text{Volumen} = 136 \text{ u}^3$$

EJERCICIO 25 : Sean los puntos $A(2, -1, 3)$, $B(-1,5,m)$, $C(m, 2, -2)$ y $D(0, 1, -3)$. Calcula el valor de m , sabiendo que el paralelepípedo determinado por los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} tiene un volumen de 40 u^3 .

Solución:

$$\vec{AB}(-3, 6, m-3); \vec{AC}(m-2, 3, -5); \vec{AD}(-2, 2, -6)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 6 & m-3 \\ m-2 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = [54 + 2(m-2)(m-3) + 60] - [-6(m-3) + 30 - 36(m-2)] = 2m^2 + 32m + 6$$

Volumen: $V = |2m^2 + 32m + 6| = 40$. Dos posibilidades:

- $2m^2 + 32m + 6 = 40 \Rightarrow 2m^2 + 32m - 34 = 0 \Rightarrow m^2 + 16m - 17 = 0$
 $m = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 68}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-16 \pm 18}{2} \begin{cases} m = 1 \\ m = -17 \end{cases}$
- $2m^2 + 32m + 6 = -40 \Rightarrow 2m^2 + 32m + 46 = 0 \Rightarrow m^2 + 16m + 23 = 0$
 $m = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 92}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{164}}{2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{41}}{2} = -8 \pm \sqrt{41}$

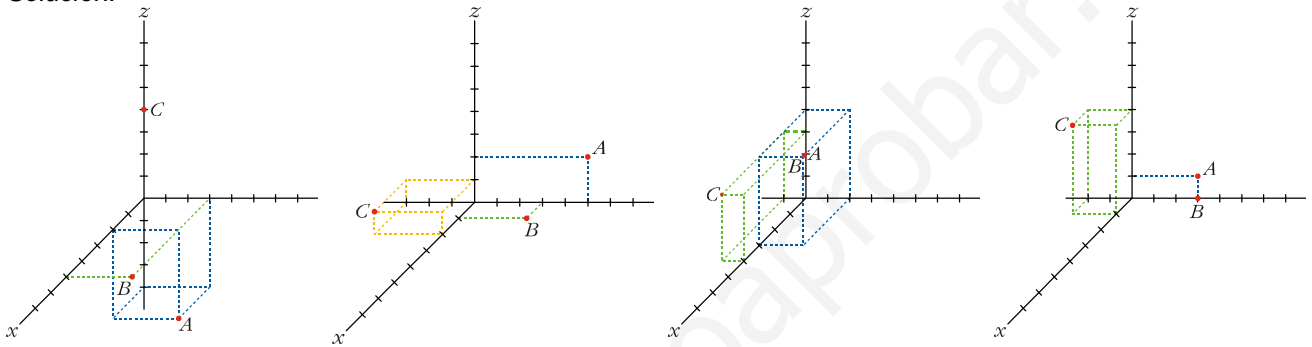
Hay cuatro soluciones: $m_1 = -17$; $m_2 = 1$; $m_3 = -8 + \sqrt{41}$; $m_4 = -8 - \sqrt{41}$

REPRESENTAR PUNTOS EN EL ESPACIO

EJERCICIO 26 : Representa los puntos siguientes:

- a) $A(2, 3, -4)$, $B(5, 3, 0)$ y $C(0, 0, 4)$ b) $A(0, 5, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(2, -3, 1)$
 c) $A(0, 0, 2)$, $B(3, 2, 4)$ y $C(4, -1, 3)$ d) $A(0, 3, 1)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(1, -2, 4)$

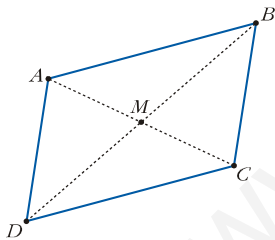
Solución:



APLICACIONES DE LOS VECTORES

EJERCICIO 27 : Los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(5, -1, 1)$ y $C(-2, 3, 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obtén el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.

Solución:



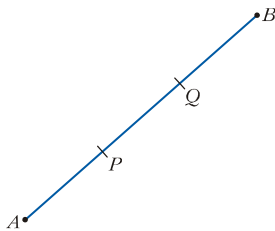
Como se trata de un paralelogramo, se tiene que $\vec{AB} = \vec{DC}$. Si $D = (x, y, z)$:
 $(2, -1, -1) = (-2 - x, 3 - y, 1 - z)$ de donde: $x = -4$, $y = 4$, $z = 2 \Rightarrow D(-4, 4, 2)$

El centro del paralelogramo es el punto medio de una de las dos diagonales, así:

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

EJERCICIO 28 : Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos $A(3, -1, 2)$ y $B(-2, 2, 4)$ en tres partes iguales.

Solución:

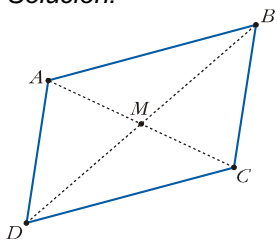


$$AB = 3AP \Rightarrow (-1, 3, 2) = 3(x - 3, y + 1, z - 2) \Rightarrow P(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3} \right)$$

$$Q = \text{Pto_medio PB} = \left(\frac{\frac{8}{3} - 2}{2}, \frac{0 + 2}{2}, \frac{\frac{8}{3} + 4}{2} \right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{3} \right)$$

EJERCICIO 29 : Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(3, 0, -1)$ y $B(2, -2, 3)$. El centro del paralelogramo está en el punto $M(1, 2, -1)$. Halla los otros dos vértices.

Solución:



Llamemos $C = (x_1, y_1, z_1)$ y $D = (x_2, y_2, z_2)$.

$$C \text{ es el simétrico de } A \text{ respecto de } M, \text{ por tanto: } \left. \begin{array}{l} \frac{3+x_1}{2} = 1 \rightarrow x_1 = -1 \\ \frac{0+y_1}{2} = 2 \rightarrow y_1 = 4 \\ \frac{-1+z_1}{2} = -1 \rightarrow z_1 = -1 \end{array} \right\} C = (-1, 4, -1)$$

$$D \text{ es el simétrico de } B \text{ respecto de } M. \text{ Así: } \left. \begin{array}{l} \frac{2+x_2}{2} = 1 \rightarrow x_2 = 0 \\ \frac{-2+y_2}{2} = 2 \rightarrow y_2 = 6 \\ \frac{3+z_2}{2} = -1 \rightarrow z_2 = -5 \end{array} \right\} D = (0, 6, -5)$$

EJERCICIO 30 : Calcula el valor de a para el cual los siguientes puntos están alineados: $A(2, a, 0)$, $B(6, 5, 2)$, $C(8, 7, 3)$

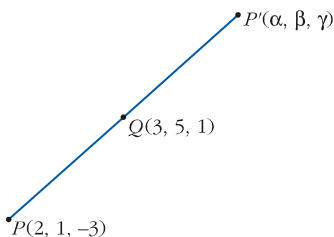
Solución:

Los puntos A , B y C están alineados siempre que los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{6-2}{8-6} = \frac{5-a}{7-5} = \frac{2-0}{3-2} \Rightarrow \frac{5-a}{2} = 2 \rightarrow 5-a=4 \rightarrow a=1$$

EJERCICIO 31 : Halla el simétrico, P' , del punto $P(2, 1, -3)$ respecto de $Q(3, 5, 1)$.

Solución:



$$\text{Llamamos } P'(\alpha, \beta, \gamma), \text{ de manera que: } \left. \begin{array}{l} \frac{2+\alpha}{2} = 3 \rightarrow \alpha = 4 \\ \frac{1+\beta}{2} = 5 \rightarrow \beta = 9 \\ \frac{-3+\gamma}{2} = 1 \rightarrow \gamma = 5 \end{array} \right\} P'(4, 9, 5)$$