# Examen de Geometría 2º Bachillerato

**Problema 1:** Sea P(1,0,-1), y $P_1$ el punto simétrico de P respecto al plano $\pi_1$:x-2y=0 y $P_2$ el punto simétrico de P respecto el plano $\pi_2$:x+2y+z=1. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P_1$, $P_2$ y $P_3$.

**Solución:**

Simétrico de P respecto a $\pi_1$ → $\vec{n}_1 = (1,-2,0)$

1) Recta perpendicular a $\pi_1$ por P $r_1$:(x,y,z)=(1+λ,-2λ,-1)
2) Punto corte de $\pi_1$ y $r_1$ → 1+λ-2(-2λ)=0 → λ=-1/5 →$M_1$(4/5,2/5,-1)
3) Simétrico $P_1(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$=(3/5,4/5,-1)

Simétrico de P respecto a $\pi_2$ → $\vec{n}_1 = (1,2,1)$

1) Recta perpendicular a $\pi_2$ por P $r_2$:(x,y,z)=(1+λ,2λ,-1+λ)
2) Punto corte de $\pi_2$ y $r_2$→1+λ+2(2λ)+(-1+λ)=1→λ=1/6 → $M_2$(7/6,1/3,-5/6)
3) Simétrico $P_2(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$=(4/3,2/3,-2/3)

El plano que pasa por los tres puntos es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow 2x+y-4z-6=0$$

**Problema 2:** Calcula la distancia de la recta $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z$ y el plano π: x-y=0.

**Solución:**

Veamos la recta como intersección de planos r: $\begin{cases} x-y=1 \\ y-2z=1 \end{cases}$. Posición relativa entre recta y plano:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$ Paralelas.

El plano π tiene punto Q(0,0,0) y $\vec{n}_\pi$ = (1,-1,0); La recta r punto P(2,1,0) y $\vec{v}_r$=(2,2,1). $\overrightarrow{PQ}$=(-2,-1,0)

d(r,π)=d(P,π)= $proy_{\vec{n}_\pi} \overrightarrow{PQ} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**Problema 3:** Estudia la posición relativa entre el plano $\pi$:x+λy+λz=1 y la recta r: $\begin{cases} 2\lambda x + y - 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 3 + \lambda \end{cases}$. Para λ=0 ¿Qué posición relativa tienen el plano y la recta? En caso de que se corten calcula el punto de corte.

**Solución:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3+\lambda \end{pmatrix}$$

Rango de M:

$|M|=6\lambda^2-9\lambda+3$; $|M|=0 \rightarrow \lambda=1,1/2$

- Si $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M)=3
- Si λ=1 → rang(M)=2
- Si λ=1/2 → rang(M)=2

Rango de M´ :

- Si $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M´)=3
- Si λ=1 rang(M')=2
- Si λ=1/2 rang(M´)=3

Conclusión:

1. $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M)=rang(M´)=3 → se cortan en un punto
2. λ=1 rang(M`)=rang(M)=2 → recta contenida en el plano
3. λ=1/2 rang(M`)=3 , rang(M)=2 → Son paralelas

Si λ=0 se cortan en el punto : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \dfrac{3}{3} = 1$, y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \dfrac{-3}{3} = -1$ z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \dfrac{-6}{3} = -2$

**Problema 4:** El vértice A es el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo pertenece a la recta $r:\begin{cases} x=3 \\ y+z=-1 \end{cases}$ y la hipotenusa tiene por extremos los puntos B(2,1,-1) y C(0,-1,3). Calcular el vértice A, el área del triángulo y los ángulos agudos del mismo.

**<u>Solución:</u>**

Las ecuaciones paramétricas de r son r: $\begin{cases} x=3 \\ y=\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$, luego A(3,λ,-1-λ) y por tanto $\overrightarrow{AB}=(-1,1-\lambda,\lambda)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-1-\lambda,4+\lambda)$

Al ser triángulo rectángulo $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\lambda^2+4\lambda+2=0$ → λ=-1.

Por tanto A(3,-1,0)

área=$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{3}\ u^2$

Ángulos → $\hat{B}=ar\cos\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\right)=ar\cos\left(\frac{1}{2}\right)=60^{o}\rightarrow\hat{C}=90-60=30^{o}$