

1.- Calcular las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y = 3x^2 - 6x + 1$ en el punto en que la abscisa es $x = 2$

Solución: Punto de tangencia $(2, 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1) = (2, 1)$

$$\text{Tangente..... } y - 1 = y'_{x=2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 6(x - 2) \Rightarrow 6x - y - 11 = 0$$

$$\text{Normal..... } y - 1 = \frac{-1}{y'_{x=2}}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{6}(x - 2) \Rightarrow x + 6y - 8 = 0$$

2.- Calcular la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

El punto de tangencia es $[0, f(0)] = (0, 1)$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es $f'(0) = -2$; luego las rectas buscadas son :

$$\text{Tangente..... } y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

$$\text{Normal..... } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$$

3.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \text{sen} x}{x^3}$

Solución:

Se trata de una indeterminación $\frac{0}{0}$, por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \text{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \text{sen} x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen} x - x \cos x}{6x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x}{6} = \frac{1}{3}$$

4.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x}$

Solución:

Al intentar resolverlo nos aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, luego:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\text{sen} x + x \cos x} \quad \text{que sigue dando una indeterminación } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\text{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \text{sen} x}{\cos x + \cos x - x \text{sen} x} = -\frac{1}{2}$$

5.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln} x}{\text{Ln} \text{Sen} x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln} x}{\text{Ln} \text{Sen} x} = \frac{-\infty}{-\infty}; \text{ así pues aplicamos la regla de L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln} x}{\text{Ln} \text{Sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\text{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\text{cpx} - x \text{sen} x} = 1$$

6.- Calcular el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc sen } x}{\text{tg } x}$

Solución:

Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, luego...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc sen } x}{\text{tg } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$$

7.- Estudiar las zonas de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x - 9$ se anula para $x_1 = -1$ y para $x = 3$;

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es creciente ya que $y' > 0$

En el intervalo $(-1, 3)$, la función es decreciente, pues $y' < 0$

En el intervalo $(3, \infty)$, la función vuelve a ser creciente

Por todo ello, el punto $(-1, (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 1) = (-1, 6)$ es un máximo, mientras que el punto de abscisa 3, $(3, -26)$ es un mínimo.

$y'' = 6x - 9$ se anula para $x = \frac{3}{2}$, luego

el intervalo $(-\infty, \frac{3}{2})$ es de concavidad negativa o convexa, pues $y'' < 0$, mientras que el

intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$ es de concavidad positiva o cóncava.

Por todo ello el punto $(\frac{3}{2}, -\frac{127}{8})$ es un punto de inflexión.

8.- Representar gráficamente la función $y = \frac{x^2 - 6}{x - 2}$

Solución:

-campo de existencia: la función existe para $\forall x \mid x \in \mathfrak{R} - \{2\}$

-simetrías: $f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow$ no hay simetrías

-asíntotas:

-horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales

-verticales: como $x = 2$ hace la función infinito, en ese punto hay asíntota vertical

- posición de la curva respecto a esta asíntota:

$f(2 - \varepsilon) > 0$, la función está en la parte positiva del eje de ordenadas

$f(2 + \varepsilon) < 0$, la función está en la parte negativa del eje de ordenadas

- oblicuas: $y = mx + n$

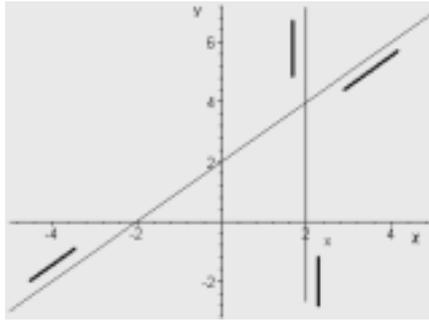
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

de donde $y = x + 2$ es una asíntota oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 2$$

- posición de la curva respecto a la asíntota oblicua:

$$\frac{x^2 - 6}{x - 2} - (x + 2) = \frac{-2}{x - 2} \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 2 \Rightarrow \text{la función sobre la asíntota} \\ < 0 & \text{si } x > 2 \Rightarrow \text{la función está bajo la asíntota} \end{cases}$$



-corte con los ejes:

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}, \text{ luego pasa por } (-\sqrt{6}, 0) \text{ y por } (\sqrt{6}, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3, \text{ pasa también por } (0, 3)$$

-crecimiento:

$$\text{como la derivada } y' = \frac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2} \text{ es positiva para cualquier valor de } x,$$

la función es siempre creciente

-máximos y mínimos: dado que $y' = 0$ no tiene soluciones reales, no hay máximos ni mínimos

-concavidad:

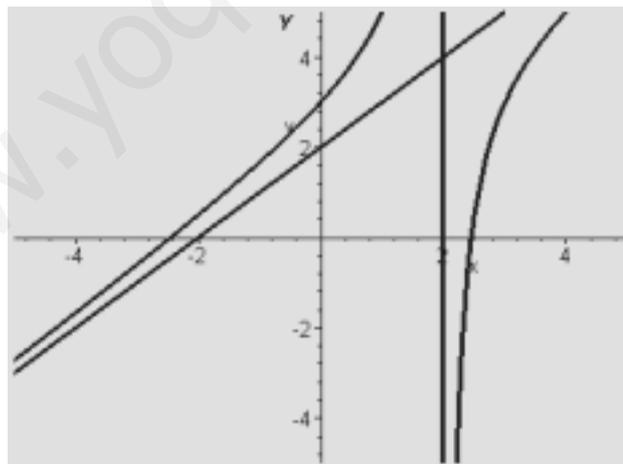
$$y'' = \frac{-4}{(x - 2)^3} \text{ que no se anula para ningún valor de } x, \text{ por lo que estudiamos el}$$

signo cerca del punto en que no existe esta segunda derivada, $x = 2$

$$f''(2 - \varepsilon) > 0 \Rightarrow \text{concavidad positiva}$$

$$f''(2 + \varepsilon) < 0 \Rightarrow \text{concavidad negativa}$$

-representación de la función:



9.- Representar la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

-Dominio: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

-Simetría: Es una función impar, luego es simétrica respecto al origen

-Asíntotas:

-Verticales: $x = -1$ y $x = 1$

-Horizontales: no hay

-Oblicuas: de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1 \cdot x] = 0$$

asi $y = x$ es una sintota oblicua

-Posición respecto de las asintotas:

-respecto a $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

-respecto a $x = -1$

lo mismo que para $x = 1$

-respecto a $y = x$

$$s = \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \frac{x}{x^2 - 1} \quad s > 0 \text{ si } \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 < 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

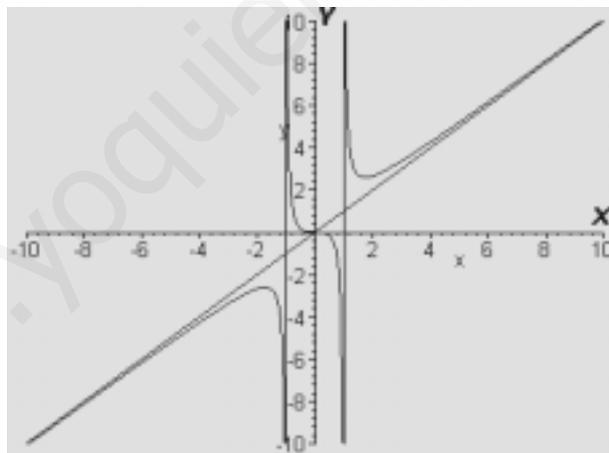
-puntos de máximos y mínimos:

-derivando e igualando a cero obtenemos $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$

-estudiando la variación de la función a ambos lados de esos puntos

$x = 0$ es un punto de inflexión, $x = -\sqrt{3}$ es un máximo relativo, $x = \sqrt{3}$ es un mínimo relativo

-representación de la función:



10.-Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

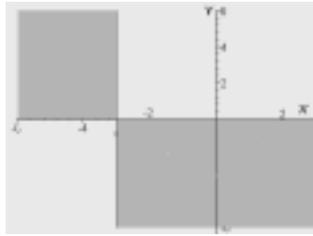
1º Delimitar en un sistema de ejes cartesianos, las regiones en que está definida la función(oscureciendo las que no esté definida)

Solución:

La función no está definida para $x = -3$: por otra parte:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} < 0 \Rightarrow x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$$



2º.- ¿Es impar la función? ¿Por qué?

Solución

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x+3} = \frac{x^2}{-x+3} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}, \text{ luego la función no es par ni impar}$$

3º.- Encontrar las asíntotas

Solución:

-Asíntotas verticales

Si $x \rightarrow -3$ entonces $y \rightarrow \infty$, luego $x = -3$ es asíntota vertical

-Asíntotas horizontales:

No hay pues no existe el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

-Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = -3$$

luego $y = x - 3$ es una asíntota oblicua

4º.- Estudiar la posición de la gráfica respecto a las asíntotas.

Solución:

-Respecto a $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

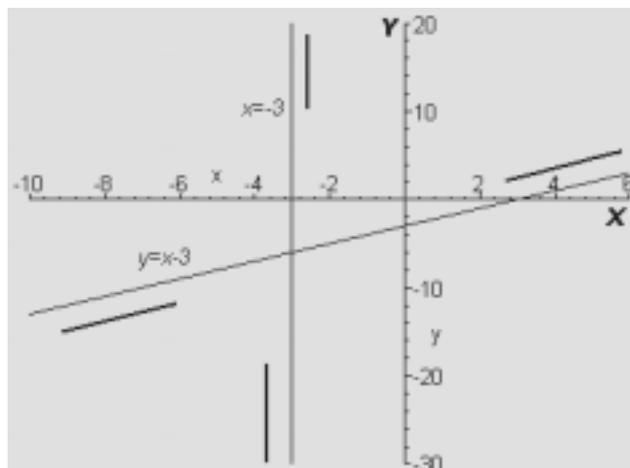
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$$

-respecto a $y = x - 3$

$$d = f(x) - (x - 3) = \frac{9}{x + 3}$$

Si $x > -3$ entonces $d > 0$

Si $x < -3$ entonces $d < 0$



5º.- Determinar los puntos de máximos y de mínimos

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

En $x = 0$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

En $x = -6$

$$x \rightarrow -6^- \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$x \rightarrow -6^+ \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

Por todo ellos podemos afirmar que

$$\text{en } \left(0; \frac{0^2}{0+3}\right) = (0; 0) \text{ hay un mínimo y}$$

$$\text{en } \left(-6; \frac{(-6)^2}{-6+3}\right) = (-6; -12) \text{ hay un máximo de la función.}$$

6º.- Estudio de la curvatura

Solución:

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x+3)(x^2+6x)}{(x+3)^4} = \frac{18}{(x+3)^3}$$

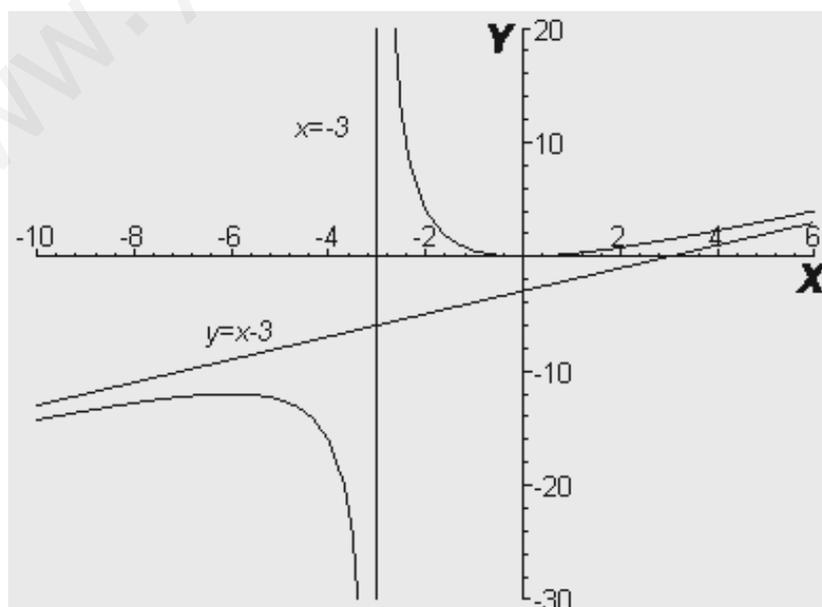
que no se anula para ningún valor de x , luego:

Si $x < -3$ entonces $f''(x) < 0$ por lo que tendrá curvatura hacia la parte negativa del las ordenadas

Si $x > -3$ entonces $f''(x) > 0$ y su concavidad estará dirigida hacia la parte positiva del eje de ordenadas.

7º., Representarla gráficamente:

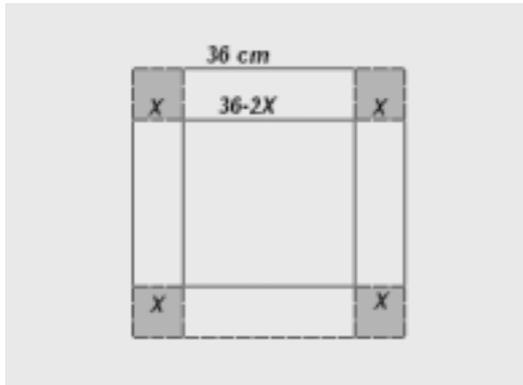
Solución:



11.- Con una cartulina cuadrada de 36 cm de lado queremos construir una caja; para ello cortamos un cuadradillo en cada esquina para poder doblar las solapas, ¿Cuánto debe medir el lado del cuadradillo a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?

Solución:

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado a cortar, como indica la figura:



La función a maximizar es

$$V = (36 - 2x)^2 x$$

de donde:

$$V' = 12x^2 - 288x + 1296 \text{ que se anula para } x = 6 \text{ y } x = 18$$

Analizando la segunda derivada, vemos que el valor $x = 6$ nos da el valor máximo.

Así pues, deberemos cortar un cuadradillo de 6 cm de lado para obtener una caja de volumen máximo

12.- Tenemos un segmento de 236 cm de longitud que dividimos en dos partes, con las que construimos dos rectángulos; el primero tiene una base doble que su altura y el segundo su base es la tercera parte de su altura. Calcular la longitud de cada corte para que el área de los rectángulos sea mínima.

Solución:

Si llamamos x a la altura del primer rectángulo e y a la base del segundo rectángulo, sus perímetros serán:

$$\text{primer rectángulo} \quad \dots \quad x + x + 2x + 2x = 6x$$

$$\text{y el segundo rectángulo} \quad \dots \quad y + y + 3y + 3y = 8y$$

como dichos perímetros deben sumar la longitud del segmento:

$$6x + 8y = 236$$

De igual forma el área de cada rectángulo es:

$$\text{primer rectángulo} \quad \dots \quad x \cdot 2x = 2x^2$$

$$\text{y el segundo rectángulo} \quad \dots \quad y \cdot 3y = 3y^2$$

y la función a minimizar

$$S = 2x^2 + 3y^2 = 2x^2 + 3\left(\frac{236 - 6x}{8}\right)^2$$

derivando

$$S' = 4x + \frac{6}{64}(236 - 6x) = (-6)$$

e igualando a cero nos da $x = 18$, que es un punto de mínimo ya que su segunda derivada es positiva.

De esta forma los dos segmentos serán, de 108 cm y de 128 cm.

13.- Descomponer un segmento, de 20 m de longitud, en cuatro partes para obtener el paralelogramo de mayor área posible.

Solución:

Si llamamos x e y a los lados del paralelogramo, el área buscada es $S = xy$ y su perímetro $2x + 2y = 20$; luego

$$S = x(10 - x)$$

que derivando e igualando a cero obtenemos $x = 5$. Se trata de un cuadrado de lado 5 m

14.- Una máquina que produce cierto tipo de piezas trabaja cada día 3,5 horas. Sabemos el que el número de piezas fabricadas en cada instante, y , es función del tiempo de funcionamiento t , y está dado por:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ t^3 - 9t^2 + 24t - 15 & \text{si } 1 < t < 4,5 \\ 0 & \text{si } t \geq 4,5 \end{cases}$$

Si el jueves pasado empezó a trabajar a las 10 de la mañana ¿a qué hora se obtuvo la máxima producción? ¿A qué hora la mínima producción?

$$y' = 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$y'' = 16t - 18 \Rightarrow \begin{cases} \text{para } t = 2 & y'' < 0 \Rightarrow t = 2 \text{ es un máximo} \\ \text{para } t = 4 & y'' > 0 \Rightarrow t = 4 \text{ es un mínimo} \end{cases}$$

De donde deducimos que a las 2 horas de trabajo, es decir a las 12 horas, se obtuvo la máxima producción y a las 2 de la tarde la mínima producción.