……….………………………………………………………………………………

1º.- Juan tiene tanto dinero como Pedro y Manolo juntos. Al doble del dinero de Pedro le falta 5 € para tener la misma cantidad que Juan y Manolo juntos; pero si Manolo da 10 € a Juan, éste tendría el doble de Pedro. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Solución:

$$\text{Sea} \quad \left.\begin{array}{l} x = \text{dinero que tiene Juan} \\ y = \text{dinero que tiene Pedro} \\ z = \text{dinero que tiene Manolo} \end{array}\right\} \text{entonces.}$$

$$\begin{cases} x = y + z \\ 2y + 5 = z + x \\ x + 10 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 25 \\ z = 15 \end{cases}$$

2º.- a) Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Aprovecha el resultado anterior para resolver matricialmente el sistema $\begin{cases} 7x - 2y = 25 \\ -3x + y = -10 \end{cases}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad Adj\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad [Adj]^t\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3º.- a) Para qué valor de "a" el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es igual a -2

b) Para ese valor de "a" , analiza y resuelve, por Cramer, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ ax + y - 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = -3 \end{cases}$$

……….………………………………………………………………………………

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \Leftrightarrow -2a+4=-2 \Rightarrow a=3$$

b)

Para ese valor de "a" el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Que es compatible y determinado pues $\det(A) = -2$;

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = -1$$

4º.-Analizar y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ x+4y-3z=0 \end{cases}$$

Solución:

Por se un sistema homogéneo es siempre compatible; estudiemos su determinación:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Ran(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran(A) = 2$$

Luego es un sistema compatible indeterminado para cuta solución sólo necesitamos dos ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ x+4y-3z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=-z \\ 3x+y=2z \end{cases}$$ que resolvemos por Cramer:

………..………………………………………………………………………………

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-z & -3\\ 2z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{5}{11}z \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -z\\ 3 & 2z\end{vmatrix}}{11}=\frac{7}{11}z$$

5º.-Estudiar en función de "*h*" y resolver, en los casos de compatibilidad, el sistema:

$$\begin{cases}2x+3y=3\\ hx+y=h+1\end{cases}$$

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 3\\ h & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\ h+1\end{pmatrix}}_{B}$$

$\begin{vmatrix}2 & 3\\ h & 1\end{vmatrix}=2-3h$, que se anula para $h=\frac{2}{3}$, luego para ese valor de *h* la matriz de coeficientes tiene $Rng(A)=1$; pero para ese valor de *h*, la matriz ampliada tiene $Ran(AB)=2,$ pues $\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & \frac{5}{3}\end{vmatrix}\neq 0$, luego el sistema es incompatible para $h=\frac{2}{3}$

Si $h\neq\frac{5}{3}$, el sistema es compatible y determinado, con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 3\\ h+1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ h & 1\end{vmatrix}}=-\frac{3h}{2-3h}=\frac{3h}{3h-2} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3\\ h & h+1\end{vmatrix}}{2-3h}=\frac{2-h}{2-3h}=\frac{h-2}{3h-2}$$