1º.-Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ kx+z=0 \\ x+(k+1)y+kz=k+1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el valor de k para que sea incompatible

b) Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z=2$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix} = -k(k+1)$$, que se anula para $\begin{cases} k=-1 \\ k=0 \end{cases}$

Si $k=-1$, el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$; se trata de un sistema compatible indeterminado

Si $k=0$, el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$; se trata de un sistema compatible indeterminado

Para cualquier otro valor de k el sistema es compatible determinado; luego el sistema no puede ser nunca incompatible.

b)

Si $z=2$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx=-2 \\ x+(k+1)y=1-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ kx=-2 \\ x+ky+y=1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ kx=-2 \\ ky=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ kx=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ kx=-2 \end{cases} \Rightarrow k=-1$$

2º a) Estudia, en función del parámetro $k \in R$, la posición relativa de los planos $\pi_1 : x+y-z=1$ y $\pi_2 : x+y-k^2z=k$

b) ¿Existe algún valor de k para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

Solución:

a)

$$Ran\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} =1, \text{ si } k=1 \Rightarrow \text{planos coincidentes} \\ =2, \text{si } k \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{paralelos si } k=-1 \\ \text{secantes para cualquier otro valor de } k \end{cases} \end{cases}$$

b) Los planos serían perpendiculares si:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -k^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + k^2 = 0$, que no tiene soluciones reales; luego no hay ningún valor de k para el cual los planos sean perpendiculares

3º.-Hallar la distancia del punto $P(1,3,-2)$ a la recta : $r:\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$

Solución:

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \right|}{|[3 \quad 1 \quad -2]|} = \frac{|[-5 \quad -11 \quad -13]|}{|[3 \quad 1 \quad -2]|} = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cong 4{,}74 \text{ unid. de long.}$$

4º.- Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo y dos semicírculos en los lados opuestos, según la figura adjunta. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea la mayor posible

Solución:

Sean "x" e "y" el largo y el ancho de la parte rectangular. Se trata de encontrar las dimensiones que maximicen la función $f(x) = xy$

Por otra parte $2x + \pi y = 400 \Rightarrow y = \frac{400-2x}{\pi}$; de donde:

$$f(x) = x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(400x - 2x^2\right)$$

$f'(x) = \frac{1}{\pi}(400-4x)$, que se anula para $x = 100$; como la segunda derivada es negativa , se trata de una función siempre convexa, luego dicho valor de x es un máximo

Así, las dimensiones del campo deberán ser

: $x = 100$ metros , $y = \frac{400-200}{\pi} = \frac{200}{\pi}$ metros

……………………..…………………………………………………………………………

5º.-Dada la función $f(x)=\dfrac{6x^2+7x+8}{3x+2}$, se pide:

a) Justificar que la recta r de ecuación $2x-y+1=0$ es una asíntota a la gráfica de la función $f(x)$

b) Calcular, razonadamente, la función $F(x)$ que verifica que $F'(x)=f(x)$ y que su gráfica pasa por el punto $(0,0)$

c) Determinar , razonadamente, el área de la superficie limitada por la recta r dada en el apartado a) , la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=0$ y $x=2$

Solución:

a)

Se trataría de una asíntota oblicua de la forma $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x+8}{3x^2+2x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{6x^2+7x+8}{3x+2}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{6x^2+7x+8-6x^2-4x}{3x+2}\right]=1$$

Luego la recta $y=2x+1$ es una asíntota de la gráfica de la función.

b)

Se trata de encontrar la primitiva de la función que pasa por el punto $(0,0)$

El conjunto de todas las primitivas de la función es :

$$\int\frac{6x^2+7x+8}{3x+2}dx=\int\left(2x+1+\frac{6}{3x+2}\right)dx=x^2+x+2\,ln\left(|3x+2|\right)+k$$

De todas estas buscamos la que pasa por el punto $(0,0)$, es decir:

Dado que todos lo términos de la función con x se anulas, $k=-2\,ln2=-ln4$, luego la función buscada es $F(x)=x^2+x+2\,ln\left(|3x+2|\right)-ln4$

c)

$$S=\int_0^2\left[\frac{6x^2+7x+8}{3x+2}-2x+1\right]dx=\int_0^2\left[\frac{6x^2+7x+8-6x^2-7x-2}{3x+2}\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left[\frac{6}{3x+2}\right]dx=2\,ln(3x+2)\Big|_0^2=4\,ln2 \text{ uni. de área}$$