1º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+2y+(\alpha+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \\ \alpha x+2y+3z=3 \end{cases}$$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado
b) Deducir, razonadamente, para que valores de α es compatible indeterminado
c) Resolver el sistema en los casos compatibles determinados

Solución:

$$Rang\begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix} = ? \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & \alpha+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\alpha^2-\alpha+6=(2-\alpha)(\alpha+3)$$ que se anula para $\alpha=-3\ y\ \alpha=2$

a) Si $\alpha\neq-3\ ó\ \alpha\neq 2$, el sistema es compatible y determinado, pues el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada coincide y es igual a 3

b) Si $\alpha=2$, el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{matrix} 2x+2y+3z=3 \\ -x+y+z=1 \\ 2x+2y+3z=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z=3 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$, sistema compatible e indeterminado

c)

Aplicando la regla de Cramer cuando $\alpha\neq-3\ ó\ \alpha\neq2$:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=\frac{2-\alpha}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=\frac{1}{(\alpha+3)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & \alpha+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & 3 \end{vmatrix}}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=\frac{(2-\alpha)(\alpha+3)}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=\frac{2-\alpha}{(2-\alpha)(\alpha+3)}=\frac{1}{\alpha+3}$$

2º.-Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $T=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$, se pide razonadamente:

a) La matriz $A^{-1}B-BA^{-1}$

b) La matriz T que cumple que su determinante es -2 y que $TA=BT$

Solución:

a)

$$A^{-1}B-BA^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -6\\ 11 & 15\end{pmatrix}-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & -6\\ 7 & 13\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

b)

$$TA=BT\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5x-2y & 2x+y\\ 5y-2z & 2y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x & 3y\\ x+3y & y+3z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-2y=3x\\ 2x+y=3y\\ 5y-2z=x+3y\\ 2y+z=y+3z\end{cases}$$

Y por otra parte: $xz-y^2=-2$

Como. $\begin{cases}5x-2y=3x\\ 2x+y=3y\\ 5y-2z=x+3y\\ 2y+z=y+3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ x-2y+2z=0\\ y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ y=2z\end{cases}$ luego:

$$y\frac{y}{2}-y^2=-2\Rightarrow-\frac{y^2}{2}=-2\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm 2$$, luego la matriz T es :

$$T=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad o\ bien\quad T=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

3º.-Dados los puntos $P=(3,4,4)$ y $Q=(1,5,3)$ y los planos de ecuaciones:

$\pi_1: x+y-z=0$ y $\pi_2: 2x+y=4$, se pide calcular razonadamente:

a) La Ecuación en forma paramétrica de la recta "*r*" que es intersección de los dos planos π_1 y π_2

b) Las coordenadas del punto R de la recta "r" que equidista de los puntos P y Q

Solución:

a) El vector director de la recta es $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1,-2,-1]$ **y** y un punto de ella es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+y=x \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (4,-4,0)$$

Luego la recta buscada es: $\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-4-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

b) Los puntos de la recta r tienen la forma $(4+\lambda,-4-2\lambda,-\lambda)$, luego:

$$\sqrt{(\lambda+1)^2+(-2\lambda-8)^2+(-\lambda-4)^2} = \sqrt{(\lambda+3)^2+(-2\lambda-9)^2+(-\lambda-3)^2}$$

O lo que es lo mismo:

$$6\lambda^2+42\lambda+81=6\lambda^2+48\lambda+99 \Leftrightarrow 6\lambda+18=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

Luego el punto buscado es:

$$\left.\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-4-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}\right|_{\lambda=-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4º.-Un tetraedro tiene por vértices los puntos

$A=(6,6,6)$, $B=(-6,-6,-6)$, $C=(-6,6,-6)$ y $D=(-6,-6,6)$

Se pide razonadamente:

a) Calcular la longitud de cada una de sus aristas

b) Hallar el volumen del tetraedro

Solución:

a) $\overline{AB}=12\sqrt{3}$ *u.* , $\overline{AC}=12\sqrt{2}$ *u.* , $\overline{AD}=12\sqrt{2}$ *u.* , $\overline{BD}=12$ *u.* , $\overline{CD}=12\sqrt{2}$ *u.*

b) $V=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1728}{6} = 288$ *unidades de volumen*

5º.-Encontrar las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Solución:

- Asíntotas horizontal: $y = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \begin{cases} y = \lim_{x \to \infty} \frac{+\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \\ y = \lim_{x \to \infty} \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x} = -1 \end{cases}$
- Asíntota vertical: $y = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$
- No hay asíntotas oblicuas ya que hay horizontales

[nota: los ejercicios del 1 al 4 se ha sacado de los modelos propuestos en las orientaciones para la PAU del presente curso]