1º Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a & a^2 & 1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$,

a) Estudiar para que valores de "*a*" ,el rango de A es menor que 3

b) Resuelve el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$ para un valor de "*a*" que haga el sistema compatible indeterminado.

Solución:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a & a^2 & 1\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=a^2-3a+2$ que se anula para $\begin{cases}a=1\\ a=2\end{cases}$, luego para esos valores de *a* la matriz tiene un rango menor que 3

b)

El sistema toma la forma: $\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a & a^2 & 1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix}}_{B}$; como nos piden que el sistema sea compatible indeterminado $A<3\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=2\end{cases}$

Si $a=1$ la matriz ampliada toma la forma:

$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{AB}$ cuyo rango es 3 como se puede ver fácilmente, luego el sistema es incompatible

Si $a=2$ la matriz ampliada toma la forma:

$$Ran\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{AB}\Leftrightarrow Ran\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 5\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow Ran\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2=Ran\,(A)$$

Luego el sistema es compatible e indeterminado, cuya solución es:

$$\left.\begin{aligned}x+2y+3z=0\\ 2x+4y+z=5\\ x+2y+z=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3z=-2y\\ 2x+z=-4y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3-2y\\ z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=-1\end{cases}$$

2º.-Dadas las rectas $r:\begin{cases} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=2 \\ y-z-5=0 \end{cases}$:

a) Estudiar razonadamente su posición relativa

b) En caso de cortarse encontrar el ángulo que forman y su punto de corte

c) En caso de cortarse encontrar el plano que delimitan las dos rectas

[Islas Canarias ,junio 2008]

Solución:

a)

Dado que el sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ z=-1 \\ x=2 \\ y-z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}$ es compatible y determinado, las rectas se cortan en el punto $(2,4,-1)$

b)

Si α es el ángulo que forman las rectas:

$$r:\begin{cases} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x=2 \\ y-z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow s:\begin{cases} x=2 \\ y=5+\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

Luego $$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = ar\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

c)

El plano delimitado por las dos rectas es:

$$p:\begin{cases} x=2+\eta \\ y=4+\eta+\gamma \\ z=-1+\gamma \end{cases}$$

3º.-Dada $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\le 0 \\ \dfrac{sen\left(x^2\right)}{x} & x>0 \end{cases}$ se pide estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ [Castilla y León. Junio 2008]

Solución:

La función es continua dentro de cada rama.

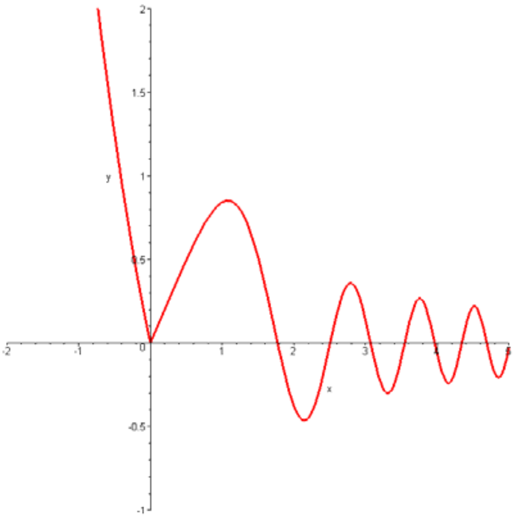
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2-2x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen\left(x^2\right)}{x} = \cancel{\dfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x\cos\left(x^2\right)}{1}=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Luego la función es siempre continua

$$f'_{\text{dentro de las ramas}}(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x^2\cos\left(x^2\right)-sen\left(x^2\right)}{x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Pero en x=0

$f'_-(0)=-2$ mientras que $f'_+=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2\cos\left(x^2\right)-sen\left(x^2\right)}{x^2}=1,$



luego la función no tiene derivada en $x=0$ como puede verse en la figura

…………………..…………………………………………………………………………

4º.-Dada las funciones $f(x)=x^3-1$, y $g(x)=x^2-5x+6$ calcular:

a) Sus las asíntotas de la función $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

b) Las zonas de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad , y los puntos singulares de la función $f(x)$

c) $\int h(x)dx$

Solución:

a)

$$h(x)=\frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$$

- No tiene asíntotas horizontales pues $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$
- Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\infty$, luego $x=2$ es una asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 3} h(x)=\infty$, luego $x=3$ es otra asíntota vertical

- Asíntotas oblicuas de la forma $y=mx+n$

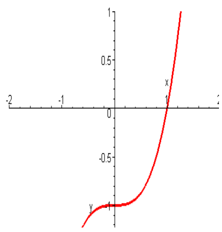
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=1 \quad : \quad n=\lim_{x\to\infty}\left[h(x)-1x\right]=5$$

Luego $y=x+5$ es asíntota oblicua

b)

$f'(x)=3x^2$ que se anula par $x=0$ por lo que $f(x)$ es una función siempre creciente pues $f'(x)>0$ para $x\neq 0$, luego no tiene ningún punto de máximo ni de mínimo

$f''(x)=6x$ que se anula para $x=0$,



luego en $\begin{cases}(-\infty,0), & f(x) \text{ es convexca (concavidad negativa)}\\ (0,\infty), & f(x) \text{ es concava (concavidad postiva)}\end{cases}$

y el punto $(0,-1)$ es un punto de inflexión

c)

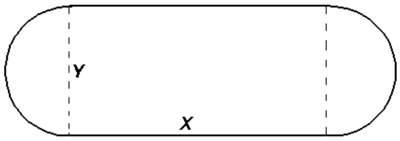
$$\int h(x)dx=\int \frac{x^3-1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(x+5-\frac{7}{x-2}+\frac{26}{x-3}\right)dx=$$

$$=\int xdx+\int 5dx-\int\frac{7}{x-2}dx+\int\frac{26}{x-3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+5x-7Ln|x-2|+26Ln|x-3|+k$$

…………………..……………………………..………………………………………………

5º.- Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos, como indica la figura. Determinar las dimensiones x e y para que el área encerrada sea máxima.



[Oviedo Junio, 2008]

Solución:

$$P = 2x + 2\frac{y}{2}\pi = 2x + y\pi \Rightarrow x = \frac{p - \pi y}{2}$$

Y la función a maximizar es;

$$S(y) = x \cdot y + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p - \pi y}{2}\right)y + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{py}{2} - \frac{\pi y^2}{2} + \frac{\pi y^2}{4} = \frac{py}{2} - \frac{\pi y^2}{4}$$

De donde

$S'(y) = \frac{p}{2} - \frac{\pi}{2}y$ que se anula para $y = \frac{p}{\pi}$ y como $S''(x) < 0$ se trata de un máximo; de ahí que las dimensiones del recinto serán:

$$y = \frac{200}{\pi} \qquad x = \frac{200 - \pi\frac{200}{\pi}}{2} = 0$$

Luego la figura que da el área máxima es un circula de radio $r = \frac{100}{\pi}$