…………………………………………………………………………………………

1º.-Sabiendo que :

$$2A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y que} \quad A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz X que cumple $AX=B$

Solución:

Para poder resolver la ecuación debemos calcular previamente A y B:

$$\left.\begin{matrix} 2A+B=C \\ A+2B=D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2A+B=C \\ 2A+4B=2D \end{cases} \Rightarrow B=\dfrac{2D-C}{3}=\dfrac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{cases} 4A+2B=2C \\ A+2B=D \end{cases} \Rightarrow A=\dfrac{2C-D}{3}=\dfrac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Luego: $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2º.-a) Discutir el siguiente sistema en función de parámetro λ

$$\begin{cases} 3x-\lambda y+z=4 \\ \lambda x-2y+2z=5 \\ 2x+\lambda y-z=-\lambda \end{cases}$$

y resolverlo en el caso de que sea compatible e indeterminado

b) cuando $\lambda=1$, ¿cuál es la posición relativa de los tres planos definidos por las ecuaciones del sistema?

Solución:

a) Dado que el rango de la matriz de coeficientes es 2

$$\begin{cases} 3x-\lambda y+z=4 \\ \lambda x-2y+2z=5 \\ 2x+\lambda y-z=-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -\lambda \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -10\lambda + 10 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 1 \text{ Rango de } A = 3 \\ \text{SI } \lambda = 1 \text{ Rango de } A = 2, \text{pues } \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

Por ello:

SI $\lambda \neq 1$, sistema es compatible y determinado

Si $\lambda = 1$, el sistema es compatible e indeterminado, pues:

$$\text{Rang(AB)=Rang} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & -4 & -11 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Cuya solución es :

$$\left.\begin{matrix} 3x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 - z \\ x - 2y = 5 - 2z \end{cases}$$

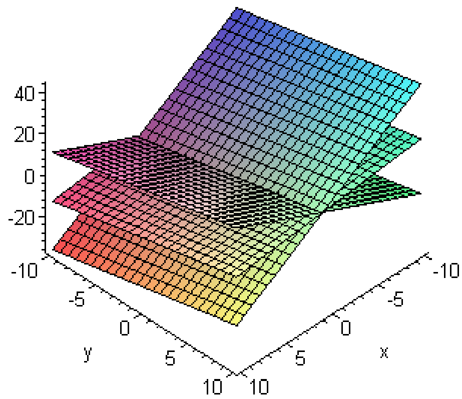
Que podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-z & -1 \\ 5-2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4-z \\ 1 & 5-2z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5z-11}{5}$$

b)

Se trata de tres planos que se cortan en la recta :

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{11}{5} + t \\ z = t \end{cases}$$



3º.-Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,3,-3)$ y $C(3,1,3)$, encontrar:

a) El centro de la circunferencia que pasa por esos puntos.

b) La ecuación de la tangente a esa circunferencia que pasa por el punto A

Solución:

a)

Los tres puntos estén en el plano

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -2 & 0 \\ z-1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-3y-2z+3=0 \quad (1)$$

Por otra parte, si el centro es el punto $O(x,y,z)$, el radio es la distancia de cada uno de dichos puntos al punto O, es decir:

$$d_{AO} = d_{B0} = d_{CO} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-0)^2+(y-3)^2+(z+3)^2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 \end{cases}$$

Que desarrollando y simplificando obtenemos las ecuaciones:

$$2x-4y+8z+15=0 \qquad (2)$$

$$x+z-4=0 \qquad (3)$$

Y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y(3) , obtenemos el centro:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y-2z+3=0 \\ 2x-4y+8z+15=0 \\ x+z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{161}{34} \\ y = \dfrac{79}{17} \\ z = -\dfrac{25}{34} \end{cases} \text{ ,es decir } \quad O = \left(\frac{161}{34}, \frac{79}{17}, -\frac{25}{34}\right)$$

También podríamos encontrar el centro como punto de intersección entre el plano (1) y los planos perpendiculares a las cuerdas $\overline{AB}(2')$ y $\overline{AC}(3')$,en sus puntos medios

- Plano que es perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$ por su punto medio:

  $\overrightarrow{BA} = [1,-2,4]$, punto medio de $\overline{AB}$ $\left(\frac{1}{2}, 2, -1\right)$

  Plano : $x-2y+4z+\dfrac{15}{2}=0 \Leftrightarrow 2x-4y+8z+15=0 \quad (2')$

- Plano que es perpendicular a la cuerda $\overline{AC}$ por su punto medio:

  $\overrightarrow{AC} = [2,0,2]$, punto medio de $\overline{AC}$ $(2,1,2)$

  Plano : $2x+2y-8=0 \Leftrightarrow x+y-4=0 \quad (3')$

…………………………………………………………………………………………………
Dichos planos coinciden con los anteriormente calculados $(2)=(2')$ y $(3)=(3')$, ya cada uno es el conjunto de punto (lugar geométrico) que equidistan de los extremos de la cuerda.

b)

La tangente en una circunferencia es perpendicular al radio: Dado que el radio está en la recta que pasa por el punto *A* y por el punto *O*, estará en un plano cuyo vector normal será $\overrightarrow{OA}=\left[\frac{127}{34},\frac{62}{17},-\frac{59}{34}\right]\Leftrightarrow[127,124,-59]$ y contiene el punto A; es pues:

$$127x+124y-159z-192=0$$

Como la tangente tiene que estar en el plano de la circunferencia (1), la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$\begin{cases}2x-3y-2z+3=0\\127x+124y-159z-192=0\end{cases}$$

4º.- Calcular la distancia entre las rectas $r:\begin{cases}x+y-z=3\\2x-z=8\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

Solución:

Pasando la recta a forma paramétrica:

$$r:\begin{cases}x=4+t\\y=-1+t\\z=2t\end{cases}$$

a) Aplicando la fórmula:

$$d_{r,s}=\frac{\left|\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\2&0&0\end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}\right|}=\frac{6}{|[3,1,-2]|}=\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{14}\text{ u. de l.}$$

b) Por métodos geométricos:

Vector genérico que une puntos de *r* con puntos de *s:*

$$\left[[4+t,-1+t,2t]-[2+\lambda,-1-\lambda,\lambda]\right]=[2+t-\lambda,t+\lambda,2t-\lambda]$$

La distancia entre las dos rectas debe ser la longitud del segmento perpendicular a ambas, luego:

$$\begin{cases}[1,1,2]\cdot[2+t-\lambda,t+\lambda,2t-\lambda]=0\\[1,-1,1]\cdot[2+t-\lambda,t+\lambda,2t-\lambda]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t-3\lambda+2=0\\3t-\lambda+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{7}\\\lambda=\frac{4}{7}\end{cases}$$

Luego ala distancia entre las rectas es la distancia este los puntos:

$$p_r\left(\frac{27}{7},-\frac{8}{7},-\frac{2}{7}\right) \quad \text{y} \quad p_s\left(\frac{18}{7},-\frac{11}{7},\frac{4}{7}\right)$$

$$d_{p_r,p_s}=\frac{3}{7}\sqrt{14} \text{ uni. de l.}$$

5º.-Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x)=\frac{|x+1|}{1-|x|}$$

Solución:

Primera explicitamos la función:

$$f(x)=\frac{|x+1|}{1-|x|}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=\begin{cases}-x-1 & \text{si } x<-1\\ x+1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}\\ |x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{|x+1|}{1-|x|}=\begin{cases}-1 & \text{si } x<-1\\ 1 & \text{si } -1\leq x<0\\ \dfrac{x+1}{1-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Dentro de las ramas la función es discontinua en $x=1$. Veamos lo que sucede en los cambios de rama:

En $x=-1$ la función es discontinua de salto 2 ya que los límites laterales no coinciden.

En $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{-1}} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1 \quad , \text{ y } \quad f(0)=1$$

, luego la función es continua en $x=0$

Así pues, la función es discontinua en los puntos $x=-1$ y $x=1$

6º.- Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+3x^2-9x+5} & \text{si } x<1\\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & \text{si } x>1\end{cases}$$

Cómo podríamos redefinir la función para que fuese continua en todas la recta real

Solución:

....

Para $x<1$ la función presenta una discontinuidad en $x=-5$, y además no existe $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

Para $x>1$ la función es siempre continua.

Veamos que sucede en $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^{-1}} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+3x^2-9x+5}=\cancel{\dfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1^{-1}} \dfrac{2x^2-x-1}{x^2+4x-5}=\cancel{\dfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1^{-1}} \dfrac{2x+1}{x+5}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^{+}} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\cancel{\dfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1^{+1}} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Podríamos redefinir la función en $x=1$, en la forma:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+3x^2-9x+5} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Para que fuese continua en dicho punto. La nueva función sería continua en todos los puntos de la recta real menos en $x=-5$