1º.-Calcular la matriz X que cumple:

$$2X + B = AX$$

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$B = AX - 2IX = (A-2I)X$ de donde $X = (A-2I)^{-1}B$, es decir:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & -1 \\ \frac{-1}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

2º.- Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando los determinantes:

$$-24 + x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow x = -6$$

3º.- Discutir el siguiente sistema, en función de "m",y resolverlo en el caso en que $m = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x + (m+1)y + (m-1)z = 0 \\ mx - (m-1)y - z = 0 \\ y - (m+1)z = 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & m+1 & m-1 \\ m & -m+1 & -1 \\ 0 & 1 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tratarse de un sistema homogéneo es compatible.

Estudiemos le $Rang(A) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & m+1 & m-1 \\ m & -m+1 & -1 \\ 0 & 1 & -m-1 \end{vmatrix} = 5m^2 + m^3$, que se anula pata $\begin{cases} m = 0 \\ m = -5 \end{cases}$

Si $m \neq -5$ o $m \neq 0$ El sistema es compatible y determinado, con solución $\{0,0,0\}$

Si $m = -5$ El sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x-4y-6z=0 \\ -5x-6y-z=0 \\ \quad y+4z=0 \end{cases}$$ Compatible e indeterminado pues $Rang(A)=2$

Si $m = 0$ El sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$ Sistema compatible e indeterminado

En Esta caso el sistema es equivalente a

$$\left.\begin{matrix} 2x+y-z=0 \\ y-z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-y=z \\ y=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

4º.-Resolver el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3x-6y=3 \\ -4x+8y=-4 \\ x-2y=1 \end{matrix}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

$Rang(AB) \Rightarrow Rang\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(AB)=1=Rang(A)=1$, se trata de un sistema compatible e indeterminado equivalente a $3x-6y=3$, cuya solución es : $x=1+2y \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$

5º.-Dado los dos vectores $\vec{a}=2i+3j-k$ y $\vec{b}=-i+j+2k$,

a) comprobar que $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es una base de vectores en V^3, si:

$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$ y $\vec{w}=\vec{a}\times\vec{b}$

b) encontrar las coordenadas del vector $i+j+k$ en la base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

Solución:

a)

$$\vec{u}=[1,4,1] \quad , \vec{v}=[3,2,-3] \quad \vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=[7,-3,5]$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, los tres vectores son linealmente independientes, luego pueden ser una base para V^3

b)

Si $[x, y, z]$ son las coordenadas de [1,1,1] en $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, de be cumplirse:

$$[1,1,1]=x[1,4,1]+y[3,2,-3]+z[7,-3,5]$$

que resolviendo obtenemos: $[x, y, z]=\left[\frac{8}{47},\frac{12}{47},\frac{3}{47}\right]$

6º.-Un triángulo tiene por lados los segmentos que contiene los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio 5º, y de longitud, respectivamente, el módulo de ellos: Calcular:

a) la longitud del otro lado
b) al área del triángulo
c) la altura del triángulo sobre el lado que soporta el vector $\vec{b}$

Solución:

a) Sea $\vec{c}$ el vector cuyo módulo es el tercer lado, entonces $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, luego $\vec{c}=\vec{u}$ y su longitud $\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ unidades de longitud

b) El triángulo es la mitad del paralelogramo cuyos lado son los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, luego el área es la mitad del módulo del vector $\vec{w}$, es decir

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+(-3)^2+5^2}=\frac{\sqrt{83}}{2} \text{ unidades de área}$$

c) Como $S=\dfrac{base \times altura}{2} \Rightarrow altura=\dfrac{2\times S}{base}=\dfrac{\sqrt{83}}{\sqrt{3^2+2^2+(-3)^2}}=\sqrt{\dfrac{83}{22}}$ unidades de longitud