EJERCICIOS DETERMINANTES.

1º/ Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

a) Usando la Regla de Sarrus.
b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

2º/ Obtén el valor del determinante de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3º/ Calcula el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4º/ ¿Para qué valor de *m* el rango de esta matriz es 2?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

5º/ Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real. Calcular el rango de A según los valores del parámetro a.

6º/ Obtén el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

7º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz $X=(A^{-1}B^t)$, donde A^{-1} es la matriz inversa de *A* y B^t es la matriz traspuesta de *B*.

8º/ Encuentra el valor de *a* que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9º/ Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro *m* existe A^{-1} .

b) Calcule A^{-1} para *m*=2.

10º/ Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de *m* para los cuales tiene inversa.

b) Haciendo *m*=2, encontrar la matriz *X* que cumple: $XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11º/ Resolver la ecuación matricial $A+BX=I$ donde:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ e *I* es la matriz identidad de orden tres.

12º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X=C\cdot X+I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

13º/ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=I$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

14º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad .$$

15º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2\cdot X-B=A\cdot X$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIONES:

1º/ Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

a) Usando la Regla de Sarrus.
b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7+6-84-9=-80$$

b)
$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)+2\cdot(-42+3)+1\cdot 7=-9-78+7=-80$$

2º/ Obtén el valor del determinante de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo podemos hacer haciendo ceros, por ejemplo en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2-1=1$$

$F_2 \to F_2 + F_1$
$F_3 \to F_3 - 2F_1$
$F_4 \to F_4 - 3F_1$

Lo podemos hacer desarrollando el determinante por adjuntos, por ejemplo por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(desarrollamos los determinantes y seguimos, nos tiene que dar 1)

3º/ Calcula el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $|A|=-18+4+2+12=0$, luego no tenemos ningún menor de orden 3 distinto de cero, pero si hay menores de orden 2 distinto de cero, por ejemplo el formado por las dos primeras filas y columnas: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+3=4\Rightarrow r(A)=2$.

b) $$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3+F_1}}{\to}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3+F_2}{\to}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow r(B)=2$$

c) $$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow r(C)=2$$

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $|D|=-16-36+16-3=39\neq 0\Rightarrow r(D)=3$ (tenemos un menor de orden 3, el propio determinante de la matriz distinto de cero).

4º/ ¿Para qué valor de *m* el rango de esta matriz es 2?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallamos el determinante de la matriz e igualamos a cero, para saber en qué valor el rango de la matriz no es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}=-7\mathrm{m}-120+72+30\mathrm{m}+112-18=23\mathrm{m}+46=0\Rightarrow m=\frac{-46}{23}=-2$$

Por tanto, para *m*=-2, tenemos que la matriz no es de rango3, pero si de rango 2, pues hay menores de orden 2 distintos de cero.

5º/ Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 5 & a\end{pmatrix}$, siendo *a* un parámetro real. Calcular el rango de *A* según los valores del parámetro *a*.

Hallamos el determinante de *A* e igualamos a cero:

$$|A|=3\text{a}+12+15-18-2\text{a}-15=a-6=0\Rightarrow a=6$$

- Si $a\neq 6\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow r(A)=3$
- Si $a=6$:

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$,tenemos menores de orden 2 distintos de cero, por ejemplo el formado por las dos primeras filas y columnas: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow r(A)=2$.

6º/ Obtén el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}$$

Hacemos ceros en la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 7 & -6 & a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, la última fila debería ser nula, luego: $a+1=0\Rightarrow a=-1$.

7º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

determinar la matriz $X=(A^{-1}B^t)$, donde A^{-1} es la matriz inversa de *A* y B^t es la matriz traspuesta de *B*.

Hallamos A^{-1} :

$$|A|=1 \qquad Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos la matriz *X*:

$$X=(A^{-1}B^t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

8º/ Encuentra el valor de *a* que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ a & 5 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Sabemos que una matriz no tiene inversa si y solo si su determinante es cero.
Hallamos entonces, el determinante de la matriz e igualamos a cero:

$$|M|=45+2\mathrm{a}-5-2\mathrm{a}=-4\mathrm{a}+40=0\Rightarrow a=\frac{-40}{-4}=10$$

9º/ Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & -6\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro *m* existe A^{-1} .

b) Calcule A^{-1} para *m*=2.

a) Existe la matriz inversa si y solo si el determinante no es cero:

$$|A|=-m^2+m+6=0\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases}\frac{4}{-2}=-2\\ \frac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

- Si $m=-2$ ó $m=3$, la matriz *A* no tiene inversa.
- Si $m\neq-2$ y $m\neq 3$, la matriz *A* si tiene inversa.

b) Caso $m=2$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$|A|=-4+2+6=4 \qquad Adj(A)=\begin{pmatrix}2 & -6 & -2\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 6 & 2\end{pmatrix} \qquad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -6 & -1 & 6\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -6 & -1 & 6\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -6 & -1 & 6\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 1/2\\ -3/2 & -1/4 & 3/2\\ -1/2 & -1/4 & 1/2\end{pmatrix}$$

10º/ Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de *m* para los cuales tiene inversa.

b) Haciendo *m*=2, encontrar la matriz *X* que cumple: $XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) *A* tiene inversa si y solo si su determinante no es cero.

$$|A|=6-m^2-1=5-m^2=0 \Rightarrow m^2=5 \Rightarrow m=\pm\sqrt{5}$$

- Si $m=\sqrt{5}$ ó $m=-\sqrt{5}$, la matriz *A* no tiene inversa.
- Si $m\neq\sqrt{5}$ y $m\neq-\sqrt{5}$, la matriz *A* si tiene inversa.

b) $m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=B$$

$$XA=B$$

Multiplicando A^{-1} por la derecha:

$$XAA^{-1}=BA^{-1}$$

$$XI=BA^{-1}$$

$$X=BA^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$|A|=1$ $\quad Adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A))^t=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos finalmente la matriz *X*:

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11º/ Resolver la ecuación matricial $A+BX=I$ donde:

$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden tres.

Despejamos la matriz X:

$A+BX=I$

$BX=I-A$

Multiplicamos B^{-1} por la izquierda:

$B^{-1}BX=B^{-1}(I-A)$

$X=B^{-1}(I-A)$

Calculamos B^{-1} :

$|B|=1$ $Adj(B)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ -4 & 2 & -5\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $(Adj(B))^t=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -2\end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot(Adj(B))^t=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos finalmente X:

$$X=B^{-1}(I-A)=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4 & 1\\ -5 & -2 & -1\\ 14 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

12º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A{\cdot}B{\cdot}X=C{\cdot}X+I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$A{\cdot}B{\cdot}X=C{\cdot}X+I$

$A{\cdot}B{\cdot}X\text{-}C{\cdot}X=I$

$(A{\cdot}B\text{-}C){\cdot}X=I$

Multiplicamos $(A\cdot B-C)^{-1}$ por la izquierda:

$$(A\cdot B-C)^{-1}\cdot(A\cdot B-C)\cdot X=(A\cdot B-C)^{-1}\cdot I$$

$$I\cdot X=(A\cdot B-C)^{-1}$$

$$\boxed{X=(A\cdot B-C)^{-1}}$$

Calculamos previamente la matriz $A{\cdot}B\text{-}C$:

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos ahora su matriz inversa:

$$\boxed{(A\cdot B-C)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}}$$

Por tanto la solución:

$$\boxed{X=(A\cdot B-C)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}}$$

13º/ Determinar la matriz *X* solución de la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=I$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz *X* de la ecuación:

$$A\cdot X\cdot B=I$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha:

$$A^{-1}A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot I\cdot B^{-1}$$

$$I\cdot X\cdot I=A^{-1}\cdot I\cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B^{-1}}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

Calculamos B^{-1} :

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es:

$$X=A^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/3\\ 1 & -1/3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 1/3\\ 1 & -1/3\end{pmatrix}}$$

14º/ Determinar la matriz *X* que verifica la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Despejamos la matriz *X* de la ecuación:

$$A \cdot X + B = C$$

$$A \cdot X = C - B$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente calculamos la solución:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}}$$

15º/ Determinar la matriz *X* que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz *X* de la ecuación:

$$A^2 \cdot X - B = A \cdot X$$

$$A^2 \cdot X - A \cdot X = B$$

$$\left(A^2 - A\right) \cdot X = B$$

Multiplicamos $\left(A^2 - A\right)^{-1}$ por la izquierda:

$$\left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot \left(A^2 - A\right) \cdot X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B}$$

Calculamos $A^2 - A$ previamente, resultando:

$$A^2 - A = A \cdot A - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y posteriormente hallamos $\left(A^2 - A\right)^{-1}$, obteniendo:

$$\left(A^2 - A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos la solución:

$$X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$