

Problema 1 Se pide:

1. Estudiar si los vectores $\vec{u}_1 = (a, -a, 1)$, $\vec{u}_2 = (2a, 1, 1)$ y $\vec{u}_3 = (1, -1, -1)$, son linealmente independientes, según los diferentes valores del parámetro a .
2. Cuando sean linealmente dependientes, escribir, si es posible, \vec{u}_3 como combinación lineal de \vec{u}_1 y \vec{u}_2

(Junio 1996-Murcia)

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \implies a = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$$

\vec{u}_1 , \vec{u}_2 y \vec{u}_3 son linealmente independientes si $a \neq -1$ y $a \neq -1/2$.

2. Si $a = -1$: $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1$

Si $a = -1/2$: $\vec{u}_3 = -\vec{u}_2$

Problema 2 Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

1. Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.
2. Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.
3. Si un observador se encuentra en el punto de coordenadas $O(0, 0, 0)$, ¿qué trayectoria sigue su mirada en el momento en el que ve coincidir a los dos aviones?.

(Junio 2006-Murcia)

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, -1, 2) \\ P_{r_1}(1, 1, 1) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (-1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 2) \end{cases}$$

$$1. \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, -1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Se cruzan}$$

2.

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |(-2, -2, 0)| = \sqrt{8}$$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = 2$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

3. Como intersección de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -1, 2) \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1, 1, 1) \\ P(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - y - 2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (1, 0, 2) \\ P(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + 2y - z = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Problema 3 Se pide:

1. Hallar la ecuación de un plano determinado por los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(1, 4, 3)$

2. Estudia la posición relativa de la recta $r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en el caso de que se corten.

(Junio 2006-Islands Canarias)

Solución:

1.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -3, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-2 \\ -3 & 1 & y \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + y - z - 3 = 0$$

2. Sustituyendo en el plano $2(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) - 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = 3/5$. Si sustituimos en la recta tenemos un punto de corte en el punto $(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5})$

Problema 4 Considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuación $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

- Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r .

(Junio 2006-Andalucía)

Solución:

$$r : \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 3, 1) \\ P_r(-1, 4, 0) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_r P} = (4, -2, 0)$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_r P} = (4, -2, 0) \\ P_r(-1, 4, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -2 & 4 & x+1 \\ 3 & -2 & y-4 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y-4z-7=0$$

2. Construimos un plano π_1 perpendicular a r que contenga a P :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_{\pi_1} = (-2, 3, 1) \\ P(3, 2, 0) \end{cases} \implies -2x + 3y + z + \lambda = 0$$

Como este plano contiene a P : $-6 + 6 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$ El plano es $\pi_1 : 2x - 3y - z = 0$.

Cortamos el plano π_1 con la recta r : $2(-1 - 2\lambda) - 3(4 + 3\lambda) - \lambda = 0 \implies \lambda = -1$

El punto de corte lo obtenemos sustituyendo en la recta $H(1, 1, -1)$. Este punto será el punto medio entre P y Q :

$$\frac{P+Q}{2} = H \implies Q = 2H - P = (-1, 0, -2)$$