

Problema 1 Dadas las retas:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \quad y \quad s : \begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- Determinar la posición que ocupan.
- Calcular la distancia mínima que las separa.
- Encontrar una recta perpendicular a ambas.
- Si $P(2, 1, 0)$ encontrar una recta que pasando por P corte a las dos rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 3) \\ P_s(1, 0, 2) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, -1, 2)$$

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

b)

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = 3; \quad |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = |(5, -1, -2)| = \sqrt{30}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10} u$$

c) $\vec{u}_t = (5, -1, -2)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 5 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-1 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2y - z - 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 5 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ -2 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x + 17y + 4z - 13 = 0$$

$$t : \begin{cases} 5x + 17y + 4z - 13 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

d) Tenemos $P(2, 1, 0)$, $\overrightarrow{PP_r} = (-1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{PP_s} = (-1, -1, 2)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2y - z - 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ 2 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies x - 5y - 2z + 3 = 0$$

$$h : \begin{cases} x - 5y - 2z + 3 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Sea el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

Se pide:

- Calcular la ecuación del plano que sea perpendicular a π y contenga a r .
- Calcular la proyección ortogonal de r sobre π .
- El plano π corta a los ejes coordenados en tres puntos que, con el origen, forman un tetraedro. Calcular su volumen y la altura sobre la base formada por los tres puntos de corte.

Solución:

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y \\ -3 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x + 3y - z + 2 = 0$$

b)

$$t : \begin{cases} x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ 3x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

c) Corte con el eje OX : $y = 0$ y $z = 0 \implies A(-1, 0, 0)$

Corte con el eje OY : $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 1/2, 0)$

Corte con el eje OZ : $y = 0$ y $x = 0 \implies A(0, 0, 1/3)$

Los vectores con el origen son:

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/2, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1/3)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{36} u^3$$

Calculamos el área de la base para ello calculamos primero

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1/2, 0); \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1/3)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(1/6, -1/3, -1/2)| = \frac{\sqrt{14}}{12} u^2$$

$$V = \frac{1}{3} Sh \implies h = \frac{\sqrt{14}}{14} u$$