

Problema 1 (5 puntos). Sean las rectas

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{cases},$$

se pide:

- Estudiar la posición de ambas rectas.
- La distancia que las separa.
- Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
- Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ corte a ambas.
- Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = -3(1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 0, 3) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, 2, 0)$$

a)

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

b)

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = |(3, -4, 1)| = \sqrt{26}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{8}{\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{26}}{13} u$$

c)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -4, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 1 & x-1 \\ -4 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 5x + 2y - 7z - 5 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -4, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, 3) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x-1 \\ -4 & 0 & y-2 \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 6x + 5y + 2z - 16 = 0$$

$$t : \begin{cases} 5x + 2y - 7z - 5 = 0 \\ 6x + 5y + 2z - 16 = 0 \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = 2(0, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies y - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = 2(0, 0, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 3) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & y-2 \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies y - 2 = 0$$

$$l : \begin{cases} y - z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

e)

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$$

$$(1 + \lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (\lambda - 2)^2 = 25 \implies 3\lambda^2 - 8\lambda - 17 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4,06 \implies P_1(5,06; 4,06; 4,06) \\ \lambda_2 = -1,4 \implies P_2(0,4; -1,4; -1,4) \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Se pide:

- Dados los puntos $P_1(1, -1, 5)$ y $P_2(2, 0, 3)$ encontrar el plano mediador.
- Dados los planos $\pi_1 : 3x + y - 4z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + 4y - 3z + 2 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2} \implies$$

$$\pi : x + y - 2z + 7 = 0$$

b)

$$\frac{|3x + y - 4z + 1|}{\sqrt{26}} = \frac{|x + 4y - 3z + 2|}{\sqrt{26}} \implies \begin{cases} \pi : 2x - 3y - z - 1 = 0 \\ \pi' : 4x + 5y - 7z + 3 = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos). Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 6z + 2 = 0$ se pide:

- a) Calcular su centro y radio.
- b) Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z = 2$.
- c) Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(4, 1, 1)$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} m = -2a = -2 \implies a = 1 \\ n = -2b = -6 \implies b = 3 \\ p = -2c = 6 \implies c = 3 \\ 2 = 1 + 9 + 9 - r^2 \end{cases} \implies C(1, 3, 3), r = \sqrt{17}$$

- b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 6 = 0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z = 0$ de centro en el punto $C'(1, 3, 2)$ y radio: $-6 = 1 + 9 - r'^2 \implies r' = \sqrt{16} = 4$

c)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \overrightarrow{CP} = (3, -2, -2) \\ P(4, 1, 1) \end{cases} \implies 3x - 2y - 2z + \lambda = 0 \implies 12 - 2 - 2 + \lambda = 0 \implies$$

$$\lambda = -8 \implies \pi : 3x - 2y - 2z - 8 = 0$$