

Problema 1 (6 puntos). Sean el plano $\pi : x - 3y + z - 1 = 0$ y la recta $r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ se pide:

- Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3, 0, 1)$.
- Encontrar una recta t paralela a r que pase por P .
- Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P .
- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π . En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.
- Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r .
- Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución:

$$\pi : \vec{u}_\pi = (1, -3, 1), \quad r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (1, -3, 1) \\ P_s = P(3, 0, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_t = P(3, 0, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \pi' : x - 3y + z + \lambda = 0 &\implies 3 - 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4 \\ \pi' : x - 3y + z - 4 = 0 &\implies P \in \pi \end{aligned}$$

d)

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \implies (-1 + \lambda) - 3(\lambda) + (1 - \lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^\circ - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}_\pi = (1, -3, 1)$ y $\vec{u}_r = (1, 1, -1)$:

$$\sin \beta = \frac{\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{-3}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}} \implies \beta = 148^\circ 31' 4''$$

e)

$$\pi'' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, -3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi'' : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ -3 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+y+2z-1=0$$

f)

$$h : \begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

Problema 2 (4 puntos). Sea el punto $P(1, 0, -2)$. Se pide

- Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x - y + 3z - 2 = 0$.
- Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Solución:

a) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (2, -1, 3) \\ P_t = P(1, 0, -2) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π :

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) - 2 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{7}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 6/7 = 13/7 \\ y = -3/7 \\ z = -2 + 9/7 = -5/7 \end{cases} \implies P' \left(\frac{13}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{7} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{26}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{10}{7}\right) - (1, 0, -2) = \left(\frac{19}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

b) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r/P \in \pi$:

$$2x + y + z + \lambda = 0 \implies 2 + 0 - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

$$\pi : 2x + y + z = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + (\lambda) + (1 + \lambda) = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1/2 \\ z = 1 - 1/2 = 1/2 \end{cases} \implies P' \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (0, -1, 1) - (1, 0, -2) = (-1, -1, 3)$$