Problema 1 Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z- & 1=0\\ 2x- & & z+ & 3=0\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

Se pide:

1. Estudiar la posición que ocupan.
2. Distancia entre ambas.
3. Calcular la recta perpendicular común a ambas.
4. Calcular un plano π' perpendicular a s que pase por el punto $P(1,-1,2)$.
5. El plano $\pi'': 2x-y+3z-6=0$ corta a los ejes coordenados en tres puntos, que junto con el origen $O(0,0,0)$ forman un tetraedro, calcular su volumen.
6. Calcular la altura de este tetraedro, tomando como base la formada por el origen y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{array}\right|=(-1,3,-2), \quad P_r(0,-2,3)$$

Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,3,-2)\\ P_r(0,-2,3)\end{array}\right. , \qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,1,-1)\\ P_s(1,0,1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(1,2,-2)$$

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -2\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=1\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

2.

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |A| = 1$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = |(-1, -3, -4)| = \sqrt{26}$$

$$d = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

3. La recta perpendicular a ambas tendrá de vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4)$$

y vendrá definida por la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, -3, -4) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, -2) \\ P_r(0, -2, 3) \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, -3, -4) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ 3 & -3 & y+2 \\ -2 & -4 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & -3 & y \\ -1 & -4 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$t : \begin{cases} 9x + y - 3z + 11 = 0 \\ 7x - 5y + 2z = 9 \end{cases}$$

4. El vector característico de este plano π' será $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, -1)$ por lo que la ecuación del plano que buscamos será de la forma

$$x + y - z + \lambda = 0$$

Como este plano contiene al punto $P(1, -1, 2)$

$$1 - 1 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

$$\pi' : x + y - z + 2 = 0$$

5. Corte con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(3, 0, 0)$

Corte con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, -6, 0)$

Corte con el eje OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 2)$

Con el origen se forman los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, -6, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-36| = 6\, u^3$$

6. La altura del tetraedro que nos piden sería $|\overrightarrow{OC}| = 2\,u$, lo voy a calcular de la manera más general posible.

   Área de la base:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(0, 0, -18)| = \frac{18}{2} = 9\,u^2$$

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h \Longrightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{18}{9} = 2\,u$$