Problema 1 *(7 puntos)*. Sean las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=2\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} x+3y-z=2\\ 2x+z=1\end{array}\right.$$

se pide:

a) Estudiar la posición de ambas rectas.

b) La distancia que las separa.

c) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(2,-1,0)$.

d) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

e) Encontrar una recta que pasando por el punto P corte a ambas.

f) Encontrar un plano paralelo a r y a s que contenga a P.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)\\ P_r(2,0,2)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,-2)\\ P_s(1,0,-1)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_sP_r}=(1,0,3)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{array}\right|=2\neq 0\Longrightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$|\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{array}\right||=|(2,2,0)|=2\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

c)

$$h:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=2(1,1,0)\\ P_h=P(2,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=0\end{array}\right.$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(2,0,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ P_s(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y+z=0$$

$$t : \begin{cases} z-2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

e)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} = (0,-1,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(2,0,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ -1 & -1 & y \\ -2 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+2y-z-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ P_s(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ 1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y-1=0$$

$$l : \begin{cases} 2x+2y-z-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

f) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = 2(1,1,0)$:

$$x+y+\lambda=0 \Longrightarrow 2-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1$$

$$\pi' : x+y-1=0$$

Problema 2 *(3 puntos).* Sea el punto $P(1,-1,3)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x - y + 3z - 2 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,3) \\ P_t = P(1,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$2(1+2\lambda)-(-1-\lambda)+3(3+3\lambda)-2=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{5}{7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=3-10/7=-3/7 \\ y=-1+5/7=-2/7 \\ z=3-15/7=6/7 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P''+P}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=$$

$$\left(-\frac{6}{7},-\frac{4}{7},\frac{12}{7}\right)-(1,-1,3)=\left(-\frac{13}{7},\frac{3}{7},-\frac{9}{7}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:

$$2x+y+z+\lambda=0 \Longrightarrow 2-1+3+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-4$$

$$\pi: 2x+y+z-4=0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,1) \\ P_r(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$$

$$2(1+2\lambda)+(\lambda)+(1+\lambda)-4=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+1/3=4/3 \\ y=1/6 \\ z=1+1/6=7/6 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P''+P}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=$$

$$\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)-(1,-1,3)=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$