# LÍMITES

**1.** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2-5x+10}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^3+3x^2-4}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} 3x^6$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4}{x^5}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^{-4}}{3}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x^7}{5}\right)$ $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{x^3-9}{x+2}\cdot\dfrac{x^3+9}{x^3-3x}\right]$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{3/x-1}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{4}{x^2+5}+\dfrac{5}{x+8}\right)$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{4}{x^3}\right)$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^{-x}$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5}{\sqrt{x^4-3}}$ q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-3x^2+5}{3x^3+2x^2-3x+1}$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2-3}\cdot(4x+2)$ v) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-3x+2}$

w) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x^3}{1-x^3}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ x) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3}$

y) $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{x+5}{x+3}\right]^{\left[\frac{x^2-4}{\sqrt{2x}-2}\right]}$ z) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{x}{2x+1}\right)^{2/x}$

Im) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}$ In) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

Iñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^3-3}{5x^3+x}\right)^{x^2-1}$ Io) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

2. Calcula los valores del parámetro $k$ para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3kx^3-5x+1}{10x^3+5}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+kx+1}-x\right]=2$

3. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x\leqslant 0 \\ x, & \text{si } x>0 \end{cases}$ en el punto $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{si } x\leqslant 0 \\ 1-2x, & \text{si } 0<x\leqslant 1 \\ x^2, & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $x=0$ y $x=1$

c) $f(x)=|x-5|$ en el punto $x=5$

d) $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x+1}$ en el punto $x=0$

En cada uno de los casos anteriores, explicar si existe el límite en los puntos indicados.

4. Da un ejemplo de una función que esté definida para todo x que no tenga límite cuando x tienda a 2.

5. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\leqslant 1 \\ ax+3 & \text{si } 1<x\leqslant 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

calcula los valores de $a$ y $b$ para que existan los límites:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ y } \lim_{x\to 2} f(x)$$

www.yoquieroaprobar.es

# CONTINUIDAD

**1.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando, cuando proceda, el tipo de discontinuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x < -2 \\ -x^2 + 4 \text{ si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 - 2x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x > -1 \\ 3 \text{ si } x \leq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x - 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5x + 2} \text{ si } x \neq 1/2 \\ -\dfrac{5}{3} \text{ si } x = 1/2 \end{cases}$

2. Determinar los valores que deben tomar los parámetros *a* y *b* para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. La función:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x - 1}$$

no está definida en el punto $x = 1$. Hallar el valor del parámetro a para que sea posible definir el valor de $f(1)$ de forma que $f$ sea continua.

4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x^3 - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiar si verifica el teorema de Bolzano en el intervalo [−1, 1]. En caso afirmativo, aplicar el teorema.

5. Demostrar que la ecuación $7^x = 8x$ tiene alguna solución en el intervalo [0 , 1]

6. Responde a las siguientes cuestiones justificando las respuestas:

a) Si $f(a) = 5$ y $f(b) = 1$, ¿existe algún $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 3$?

b) De una función se sabe que tiene tres raíces en el intervalo [−4, 2] y que toma valores de igual signo en los extremos. ¿Es esto posible?

En caso afirmativo, construye un ejemplo.

c) La función $f(x) = 1/x$ ¿es continua en todo su dominio?

En caso afirmativo, explicar la aparente contradicción de continuidad e inexistencia de máximo y mínimo.

7. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$$

para los distintos valores del parámetro $k$.

8. Demuestra que existe algún número real entre 0 y 1 para el cual se verifica la siguiente igualdad:

$$x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

9. Determinar los valores que debe tomar el parámetro a para que la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax - 12}$$

presente una discontinuidad evitable en el punto $x = 2$.

www.yoquieroaprobar.es

10 Probar que la ecuación:

$$2x + \text{sen } x = 1$$

tiene alguna solución real.

11. Calcular los valores de los parámetros $a$ y $b$ para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ a + x^2 \text{ si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Aplicar el teorema.

12. Si f(x) es una función continua en el intervalo [1 , 9] y es tal que f(1) = -5 y f(9) >0 , ¿podemos asegurar en estas condiciones que la función g(x) = f(x) + 3 tiene al menos un cero en el intervalo [1 , 9] ?

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

14. Completar:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

en $x = 2$, a fin de salvar la discontinuidad evitable que presenta en dicho punto.

15. Estudiar las discontinuidades de:

$$f(x) = e^{1/x-1}$$

en $x = 1$.

16. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 1 - x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

¿Es continua en todo $R$?

www.yoquieroaprobar.es

# SOLUCIONES EJERCICIOS LÍMITES Y CONTINUIDAD

## EJERCICIOS DE LÍMITES

### Ejercicio 1

a: -4
b: 0
c: 2
d: $+\infty$
e: $+\infty$
f: $+\infty$
g: -1
h: $\frac{1}{24}$
i: 0

j: $\frac{36}{5}$
k: $1^-$ $-\infty$
$1^+$ $+\infty$
l: $e^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{e^3}$
m:0
n: 0
ñ: $+\infty$
o: 0
p: $+\infty$

q: $+\infty$
r : 5 / 3
s: 3 / 2
t: $2^+$ $+\infty$
$2^-$ no existe
u: $+\infty$
v: 12
w: $1^-$ $-\infty$
$1^+$ $+\infty$
x: $+\infty$

y: $\left(\frac{7}{5}\right)^8$
z: $e^2$
lm: $1^-$ $-\infty$
$1^+$ $+\infty$
ln: $+\infty$
lñ: $e^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} = \frac{\sqrt[5]{e^4}}{e}$
lo:16

### Ejercicio 2

a) k= -10 / 3 b) k = 4

### Ejercicio 3

a) Por la izquierda 1 y por la derecha 0
b) En x=0 ambos 1; en x=1 por la izquierda -1 y por la derecha 1
c) Ambos 0
d) Ambos 0

### Ejercicio 4

Por ejemplo : $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 2 \\ x+3 & si \quad x > 2 \end{cases}$

### Ejercicio 5

a= -1 y b= $\frac{3}{8}$

www.yoquieroaprobar.es

# EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

## Ejercicio 1

a) Continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ En x= -2 y x= 2, discontinuidad de salto finito.
b) Continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ En x=1 discontinuidad de salto finito
c) Continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$ En x=-1 discontinuidad de salto finito
d) Continua en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ En x=0 discontinuidad de salto infinito y en x=1 de salto finito
e) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ En x=0 discontinuidad de salto finito
f) Continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ En x=2 discontinuidad de salto infinito.

## Ejercicio 2

a) a= 1
b) a=3 y b= -1
c) a cualquiera y b= 0
d) a= -1 y b= 1
e) a = 1 ó 2

## Ejercicio 3

a = -3. Para que pueda definirse, el límite debe ser un número real, y esto sólo es posible si al hacer el límite sale una indeterminación 0/0. Así que tenemos que buscar un valor de "a" que haga que el numerador sea cero la sustituir al x por 1.

## Ejercicio 4

Sí la cumple

## Ejercicio 5

Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = 7^x - 8x$ en el intervalo [0,1]

## Ejercicio 6

Sí, siempre que la función f(x) sea continua.
Sí.
Sí. Su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$ . En cualquier intervalo que no contenga 0, que es donde es continua, la función tiene máximo y mínimo.

## Ejercicio 7

La función es continua si $k \neq 0$

## Ejercicio 8

Aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) = x-\dfrac{1}{x^2+1}$ en ese intervalo.

www.yoquieroaprobar.es

**Ejercicio 9**

No es posible para ningún valor de “a”

**Ejercicio 10**

Aplicar teorema de Bolzano en $[0, \Pi/2]$ a la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x - 1$

**Ejercicio 11**

$a = 1$ y $b = 2$

**Ejercicio 12**

Sí, pues $f(1) = -2$ y $f(9) > 0$ y por tanto se puede seguir aplicando el teorema de Bolzano.

**Ejercicio 13**

Continua en $\mathbb{R}$

Continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ En 1, discontinuidad de salto finito

**Ejercicio 14**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 1 & si \quad x=2 \end{cases}$$

**Ejercicio 15**

f(1) no existe. Por la izquierda el límite es 0 y por la derecha $+\infty$, por tanto, discontinuidad de salto infinito

**Ejercicio 16**

Sí lo es.

www.yoquieroaprobar.es