

# Opción A

## Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema 
$$\begin{cases} mx + 3y + z = 1 \\ x + my + 3z = 1 \\ x + y + mz = 3 \\ 3x + y + z = m \end{cases}$$
 según los valores del parámetro, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

### Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_2+F_3+F_4} = \begin{vmatrix} m+5 & m+5 & m+5 & m+5 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}_{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1 \\ C_4=C_4-C_1}} = \\ &= (m+5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix} = (m+5) \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_3} = (m+5) \begin{vmatrix} m-3 & 0 & m-3 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_1} = (m+5) \begin{vmatrix} m-3 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-1 \end{vmatrix} = \\ &= (m+5)(m-3) \begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ -2 & m-1 \end{vmatrix} = (m+5)(m-3)(m^2-2m+5) \Rightarrow (m+5)(m-3)(m^2-2m+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

El determinante se anula para  $m = -5$  y  $m = 3 \Rightarrow$  si  $m \neq -5$  y  $m \neq 3$ ,  $\text{Rang}(\bar{A}) = 4 > \text{Rang}(A) \Rightarrow$  sistema incompatible

Para  $m = -5$ ,  $\text{Rang}(\bar{A}) < 4$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 80 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 1 \\ x + y - 5z = 3 \\ 3x + y + z = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{80} = -1; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{80} = -1; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{80} = -1$$

Para  $m = 3$ ,  $\text{Rang}(\bar{A}) < 4$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{16} = 1; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{16} = -1; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{16} = 1$$

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Si  $A$  es cualquier matriz con  $n$  filas y  $n$  columnas tal que  $A^3 + A - I = 0$ , probar que  $\det(A) \neq 0$ .  
Suponiendo que  $\det(A^2) = 9$ , calcular el valor de  $\det(A^2 + I)$ .

Solución:

Como  $A^3 + A - I = 0 \Rightarrow A^3 + A = I$  ;  $A \cdot (A^2 + I) = I \Rightarrow A^{-1} = A^2 + I$   
entonces, existe  $A^{-1}$ , con lo que  $|A| \neq 0$ .

Sabemos que  $|A^2| = 9 \Rightarrow |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \Rightarrow |A| = 3$  o  $|A| = -3$

$A^2 + I = A^{-1} \Rightarrow |A^2 + I| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ , entonces tenemos que  $|A^2 + I| = \frac{1}{3}$  o  $|A^2 + I| = -\frac{1}{3}$

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determinar todos los valores de  $m$  para los que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero es ordenar el sistema :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = mx + 1 \\ -3x - 2y = mx - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-m)x + y = 1 \\ (m+3)x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ m+3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 2, \text{ para que el sistema no tenga solución } \text{Rang}(A) < 2 \Rightarrow |A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ m+3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2m - m - 3 = 1 - 3m ; |A| = 0 \Rightarrow 1 - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resolver la ecuación matricial  $A \cdot (X + C) B^t = D$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Hay que resolver la ecuación  $A \cdot (X + C) \cdot B^t = D \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (X + C) \cdot B^t \cdot (B^t)^{-1} = A^{-1} \cdot D \cdot (B^t)^{-1}$  ;

$(X + C) = A^{-1} \cdot D \cdot (B^t)^{-1}$  ; entonces, la matriz  $X$  pedida será  $X = A^{-1} \cdot D \cdot (B^t)^{-1} - C$

Calculamos  $A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos  $(B')^{-1}$

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |B'| = -2; \quad B_{11} = -2 \quad B_{21} = -4 \\ B_{12} = 1 \quad B_{22} = 3 \Rightarrow (B')^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot D \cdot (B')^{-1} - C = \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## Opción B

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Estudiamos el rango de  $A$  según los valores de  $\lambda$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 - \lambda - 2\lambda + (1+\lambda) + \lambda^2 - 2(1+\lambda) = 2\lambda^2 - 2\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 1}$ ,  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \Rightarrow \text{solución única.}$

$$\boxed{\text{si } \lambda = 0}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

entonces tenemos que  $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$

si  $\lambda = 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , como  $C_2 = C_4$  no hay menores de orden 3 distintos de cero

$\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$  sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para  $\lambda = 1$   $\begin{cases} x + 2y = 2 + z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}$ ,  $1^a - 2^a \Rightarrow y = 1 + 3z \Rightarrow x = -5z \Rightarrow$  solución:  $\begin{cases} x = -5\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Resolvamos el sistema para el caso compatible determinado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2\lambda & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(1+\lambda)^2 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda(1+\lambda)}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{-2\lambda^2 - \lambda + 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{(\lambda-1)(-2\lambda-3)}{2\lambda(\lambda-1)} = -\frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2\lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\lambda(1+\lambda) - 1 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda - 2(1+\lambda)}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{2\lambda^2 + \lambda - 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{(\lambda-1)(2\lambda+3)}{2\lambda(\lambda-1)} = \frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(1+\lambda) + 2\lambda + 4\lambda - 2(1+\lambda) - 2\lambda - 2}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{3\lambda - 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda(\lambda-1)} = \frac{3}{2\lambda}$$

## Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los vectores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $a_1 = (1, 2, 3)$ ;  $a_2 = (2, -1, 1)$ ;  $a_3 = (1, -1, -1)$  se pide:

- Comprobar si son linealmente independientes.
- Dado  $a_4 \in \mathbb{R}^3$ ,  $a_4 = (3, -1, 2)$ , ¿depende linealmente de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ ?
- Encontrar una combinación lineal nula de los vectores  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ .

**Solución:**

a) Veamos si los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{al ser distinto de cero, las tres filas (consideradas como vectores fila) y las tres columnas}$$

(consideradas como vectores columna) son linealmente independientes  $\Rightarrow$  los vectores  $a_1, a_2, a_3$  son linealmente independientes.

b) Como  $a_1, a_2, a_3$  son tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión 3  $\Rightarrow$  son base de  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$  cualquier otro vector de  $\mathbb{R}^3$  se puede poner como combinación lineal de  $\{a_1, a_2, a_3\} \Rightarrow$  en particular,  $a_4 = (3, -1, 2)$  depende linealmente de  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .

$$c) a_4 = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 \Rightarrow (3, -1, 2) = \alpha_1 \cdot (1, 2, 3) + \alpha_2 \cdot (2, -1, 1) + \alpha_3 \cdot (1, -1, -1) \Rightarrow$$

$$(3, -1, 2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -1 & (1^a) + (2^a) - (3^a) \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{5}}, \boxed{\alpha_2 = \frac{7}{5}}$$

También podemos resolver el sistema por la regla de Cramer:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{5}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\text{Entonces } a_4 = \frac{1}{5} \cdot a_1 + \frac{7}{5} \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \Rightarrow 5 \cdot a_4 = 1 \cdot a_1 + 7 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \Rightarrow \boxed{a_1 + 7 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 5 \cdot a_4 = 0}$$

### Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

$$\text{Resolver la ecuación: } \begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 & x-1 \\ 1 & -x & 1 & -2 \\ x & 5 & x & 4 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 & x-1 \\ 1 & -x & 1 & -2 \\ x & 5 & x & 4 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} 2x-3 & 2 & 3 & x-1 \\ 0 & -x & 1 & -2 \\ 0 & 5 & x & 4 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (2x-3) \begin{vmatrix} -x & 1 & -2 \\ 5 & x & 4 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (2x-3)(-x^3+3x-2)$$

$$(2x-3)(-x^3+3x-2)=0 \Rightarrow (2x-3)(x-1)^2(-x-2)=0 \Rightarrow \left\{ x = \frac{3}{2}, x = 1, x = -2 \right\}$$

### Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

$$\text{Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ calcular } A^{-1} \text{ y } A^n; (a \neq 0).$$

Solución:

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 \neq 0 \text{ puesto que } a \neq 0 \Rightarrow \text{ existe la matriz } A^{-1}, \text{ calculemosla:}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad |A| = a^3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora  $A^n$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} ; \quad A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que  $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n^2-n)a^{n-2}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} = a^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & na & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & a^2 & na \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$